

I. Định nghĩa đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao là một khái niệm mở rộng của đạo hàm, được định nghĩa bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp nhiều lần của một hàm số.

1. Đạo hàm cấp hai

- **Định nghĩa:** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ lại có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$.
- **Ký hiệu:** $f''(x)$ hoặc y'' hoặc $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$
- **Công thức:** $f''(x) = (f'(x))'$
- **Giải thích:** Để tìm đạo hàm cấp hai của một hàm số, ta thực hiện hai bước: đầu tiên tìm đạo hàm cấp một $f'(x)$, sau đó lấy đạo hàm của kết quả $f'(x)$ vừa tìm được.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.

Lời giải:

Bước 1: Tính đạo hàm cấp một.

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 5x + 1)' = 3x^2 + 6x - 5.$$

Bước 2: Tính đạo hàm của $f'(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 6x - 5)' = 6x + 6.$$

Vậy, đạo hàm cấp hai của hàm số là $f''(x) = 6x + 6$.

2. Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin(2x)$.

Lời giải:

Ta có đạo hàm cấp một:

$$y' = (\sin(2x))' = 2\cos(2x).$$

Tiếp tục lấy đạo hàm của y' :

$$y'' = (2\cos(2x))' = 2 * (-\sin(2x)) * 2 = -4\sin(2x).$$

Vậy, $y'' = -4\sin(2x)$.

2. Đạo hàm cấp n

- **Định nghĩa:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp $(n-1)$, ký hiệu là $f^{(n-1)}(x)$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Nếu hàm số $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$.
- **Ký hiệu:** $f^{(n)}(x)$ hoặc $y^{(n)}$
- **Công thức:** $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$
- **Giải thích:** Đạo hàm cấp n là kết quả của việc lấy đạo hàm n lần liên tiếp của hàm số ban đầu. Đạo hàm cấp ba là $f'''(x) = (f''(x))'$, đạo hàm cấp bốn là $f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$, và cứ tiếp tục như vậy.

Ví dụ minh họa:

1. Ví dụ 1: Tìm đạo hàm cấp ba của hàm số $y = x^4 - 2x^3 + 5x$.

Lời giải:

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 5$$

$$y'' = (4x^3 - 6x^2 + 5)' = 12x^2 - 12x$$

$$y''' = (12x^2 - 12x)' = 24x - 12.$$

2. **Ví dụ 2:** Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = e^x$.

Lời giải:

$$y' = e^x$$

$$y'' = (e^x)' = e^x$$

$$y''' = (e^x)' = e^x$$

...

Dự đoán: $y^{(n)} = e^x$. Ta có thể chứng minh bằng quy nạp. Vậy đạo hàm cấp n của e^x là chính nó.

II. Đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản

Việc tính đạo hàm cấp cao bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp có thể dài dòng. Một số hàm số cơ bản có công thức tổng quát cho đạo hàm cấp n.

Hàm số $f(x)$	Đạo hàm cấp n $f^{(n)}(x)$
$y = x^m$ ($m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$)	$y^{(n)} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$
$y = e^{ax+b}$	$y^{(n)} = a^n e^{ax+b}$
$y = \sin(ax+b)$	$y^{(n)} = a^n \sin(ax + b + n\pi/2)$
$y = \cos(ax+b)$	$y^{(n)} = a^n \cos(ax + b + n\pi/2)$
$y = 1/(ax+b)$	$y^{(n)} = (-1)^n n! a^n / (ax+b)^{n+1}$

Ví dụ áp dụng công thức:

1. **Ví dụ 1 (Hàm lũy thừa):** Tìm đạo hàm cấp 5 của $y = x^7$.

Lời giải:

Áp dụng công thức với $m=7, n=5$.

$$y^{(5)} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^{7-5} = 2520x^2.$$

2. **Ví dụ 2 (Hàm lượng giác):** Tìm đạo hàm cấp 2024 của $y = \cos(x)$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $y^{(n)} = a^n \cos(ax + b + n\pi/2)$ với $a=1, b=0, n=2024$.

$$y^{(2024)} = 1^{2024} \cos(x + 2024\pi/2) = \cos(x + 1012\pi).$$

Vì 1012π là một bội chẵn của π , nên $\cos(x + 1012\pi) = \cos(x)$.

$$\text{Vậy } y^{(2024)} = \cos(x).$$

III. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Trong vật lý, đặc biệt là trong cơ học, đạo hàm có ý nghĩa vô cùng quan trọng để mô tả chuyển động của một vật.

1. Vận tốc tức thời (Đạo hàm cấp một)

- **Ý nghĩa:** Xét một vật chuyển động thẳng có phương trình quãng đường theo thời gian là $s = s(t)$. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số quãng đường tại điểm đó.
- **Công thức:** $v(t) = s'(t)$
- **Giải thích:** Vận tốc tức thời thể hiện tốc độ và hướng chuyển động của vật ngay tại một thời điểm nhất định. Nếu $v(t) > 0$, vật chuyển động theo chiều

dương. Nếu $v(t) < 0$, vật chuyển động theo chiều âm.

Ví dụ minh họa:

Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s(t) = (1/2)gt^2$, trong đó $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường và t là thời gian tính bằng giây. Tìm vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3\text{s}$.

Lời giải:

Phương trình quãng đường là $s(t) = 4.9t^2$.

Vận tốc tức thời được tính bằng đạo hàm của $s(t)$:

$$v(t) = s'(t) = (4.9t^2)' = 2 * 4.9 * t = 9.8t.$$

Tại thời điểm $t = 3\text{s}$, vận tốc của vật là:

$$v(3) = 9.8 * 3 = 29.4 \text{ m/s}.$$

2. Gia tốc tức thời (Đạo hàm cấp hai)

- **Ý nghĩa:** Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t là đạo hàm của hàm số vận tốc $v(t)$, hay là đạo hàm cấp hai của hàm số quãng đường $s(t)$.
- **Công thức:** $a(t) = v'(t) = s''(t)$
- **Giải thích:** Gia tốc đặc trưng cho sự thay đổi nhanh hay chậm của vận tốc. Nếu gia tốc và vận tốc cùng dấu ($a(t) \cdot v(t) > 0$), vật chuyển động nhanh dần. Nếu gia tốc và vận tốc trái dấu ($a(t) \cdot v(t) < 0$), vật chuyển động chậm dần. Nếu $a(t) = 0$, vật chuyển động đều (vận tốc không đổi).

Ví dụ minh họa:

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2\text{s}$.

Lời giải:

Bước 1: Tìm phương trình vận tốc $v(t)$.

$$v(t) = s'(t) = (t^3 - 3t^2 + 5t + 2)' = 3t^2 - 6t + 5.$$

Bước 2: Tìm phương trình gia tốc $a(t)$.

$$a(t) = v'(t) = (3t^2 - 6t + 5)' = 6t - 6.$$

Bước 3: Tính gia tốc tại $t = 2s$.

$$a(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 \text{ m/s}^2.$$

3. Bảng tổng kết mối quan hệ và phân tích chuyển động

Mối quan hệ giữa dấu của vận tốc $v(t)$ và gia tốc $a(t)$ quyết định tính chất của chuyển động.

Dấu của $v(t)$	Dấu của $a(t)$	Tích $a(t) \cdot v(t)$	Loại chuyển động
+ (Cùng chiều dương)	+	+	Nhanh dần
+ (Cùng chiều dương)	-	-	Chậm dần
- (Ngược chiều dương)	-	+	Nhanh dần
- (Ngược chiều dương)	+	-	Chậm dần

Ví dụ tổng hợp:

Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ ($t > 0$). Xác định các khoảng thời gian mà vật chuyển động nhanh dần và chậm dần.

Lời giải:

1. Tính $v(t)$ và $a(t)$:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

2. Xét dấu của $v(t)$ và $a(t)$:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 3.$$

Bảng xét dấu $v(t)$: $v(t) > 0$ khi $t \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$; $v(t) = 0$ khi $t \in \{1, 3\}$.

$$a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Bảng xét dấu $a(t)$: $a(t) > 0$ khi $t > 2$; $a(t) < 0$ khi $t < 2$.

3. Lập bảng tổng hợp và kết luận:

Khoảng t	Dấu $v(t)$	Dấu $a(t)$	Tính chất chuyển động
$(0, 1)$	+	-	Chậm dần
$(1, 2)$	-	-	Nhanh dần
$(2, 3)$	-	+	Chậm dần
$(3, +\infty)$	+	+	Nhanh dần

Kết luận:

- Vật chuyển động nhanh dần trên các khoảng $(1, 2)$ và $(3, +\infty)$.
- Vật chuyển động chậm dần trên các khoảng $(0, 1)$ và $(2, 3)$.