

I. Các quy tắc tính đạo hàm cơ bản

Để tính đạo hàm của các hàm số phức tạp, trước hết chúng ta cần nắm vững các quy tắc cơ bản áp dụng cho các phép toán cộng, trừ, nhân, chia.

1. Đạo hàm của tổng và hiệu hai hàm số

- **Công thức:** $(u + v)' = u' + v'$ và $(u - v)' = u' - v'$
- **Giải thích:** Đạo hàm của một tổng (hoặc hiệu) bằng tổng (hoặc hiệu) các đạo hàm.
- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + \sin(x)$.
Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của tổng, ta có:
$$y' = (x^3)' + (\sin(x))' = 3x^2 + \cos(x).$$
- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^4 - \sqrt{x}$.
Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của hiệu, ta có:
$$y' = (x^4)' - (\sqrt{x})' = 4x^3 - 1/(2\sqrt{x}).$$

2. Đạo hàm của tích hai hàm số

- **Công thức:** $(u.v)' = u'.v + u.v'$
- **Công thức hệ quả (đạo hàm của hằng số nhân với hàm số):** $(k.u)' = k.u'$ (với k là hằng số)
- **Giải thích:** Đạo hàm của tích hai hàm số bằng đạo hàm của hàm thứ nhất nhân với hàm thứ hai, cộng với hàm thứ nhất nhân với đạo hàm của hàm thứ hai.

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \cdot \sin(x)$.

Lời giải: Đặt $u = x^2$ và $v = \sin(x)$. Ta có $u' = 2x$ và $v' = \cos(x)$.

Áp dụng công thức, ta được: $y' = (x^2)' \sin(x) + x^2 (\sin(x))' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 5x^3$.

Lời giải: Áp dụng công thức hệ quả, ta có: $y' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot (3x^2) = 15x^2$.

3. Đạo hàm của thương hai hàm số

- **Công thức:** $(u/v)' = (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2$ (với $v \neq 0$)
- **Công thức hệ quả đặc biệt:** $(1/v)' = -v' / v^2$ (với $v \neq 0$)
- **Giải thích:** Đạo hàm của một thương được tính bằng (đạo hàm của tử nhân với mẫu, trừ đi tử nhân với đạo hàm của mẫu), tất cả chia cho bình phương của mẫu.

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x + 1) / (x - 3)$.

Lời giải: Đặt $u = 2x + 1$ và $v = x - 3$. Ta có $u' = 2$ và $v' = 1$.

Áp dụng công thức, ta được:

$$y' = [(2x + 1)' \cdot (x - 3) - (2x + 1) \cdot (x - 3)'] / (x - 3)^2$$

$$y' = [2(x - 3) - (2x + 1) \cdot 1] / (x - 3)^2$$

$$y' = (2x - 6 - 2x - 1) / (x - 3)^2 = -7 / (x - 3)^2.$$

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x / \cos(x)$.

Lời giải: Áp dụng công thức đạo hàm của thương:

$$y' = [(x)' \cdot \cos(x) - x \cdot (\cos(x))'] / \cos^2(x)$$

$$y' = [1 \cdot \cos(x) - x \cdot (-\sin(x))] / \cos^2(x)$$

$$y' = (\cos(x) + x.\sin(x)) / \cos^2(x).$$

II. Bảng đạo hàm của các hàm số cơ bản

Dưới đây là bảng tổng hợp công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp thường gặp mà học sinh cần ghi nhớ.

Hàm số $y = f(x)$	Đạo hàm $y' = f'(x)$
$y = c$ (hằng số)	$y' = 0$
$y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 1$)	$y' = n.x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = 1 / (2\sqrt{x})$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = \tan(x)$	$y' = 1 / \cos^2(x) = 1 + \tan^2(x)$
$y = \cot(x)$	$y' = -1 / \sin^2(x) = -(1 + \cot^2(x))$

III. Đạo hàm của hàm số hợp

Đây là phần kiến thức trọng tâm, giúp giải quyết các bài toán đạo hàm phức tạp hơn.

1. Khái niệm hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có giá trị thuộc tập xác định của hàm số $y = f(u)$, thì ta có thể lập một hàm số mới, gọi là hàm hợp của f và g , xác định bởi công thức **$y = f(g(x))$** .

- **Ví dụ:** Cho hàm số $y = (3x + 2)^5$. Ta có thể xem đây là hàm hợp với $u = g(x) = 3x + 2$ và $y = f(u) = u^5$.

2. Quy tắc tính đạo hàm của hàm số hợp (Quy tắc xích)

- **Công thức:** Nếu $y = f(u)$ với $u = g(x)$ là hàm số hợp $y = f(g(x))$, thì đạo hàm của y theo x được tính như sau: **$y'_x = y'_u \cdot u'_x$**
- **Giải thích:** Để tính đạo hàm của hàm hợp, ta lấy đạo hàm của hàm số "bên ngoài" (hàm f) theo biến trung gian u , sau đó nhân với đạo hàm của hàm số "bên trong" (hàm g) theo biến x .

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 3x)^4$.

Lời giải:

Đặt $u = x^2 + 3x$. Khi đó, $y = u^4$.

Ta có: $y'_u = 4u^3$ và $u'_x = 2x + 3$.

Áp dụng quy tắc xích: $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot (2x + 3)$.

Thay $u = x^2 + 3x$ trở lại, ta được: $y' = 4(x^2 + 3x)^3(2x + 3)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(5x - 1)$.

Lời giải:

Đặt $u = 5x - 1$. Khi đó, $y = \sin(u)$.

Ta có: $y'_u = \cos(u)$ và $u'_x = 5$.

Áp dụng quy tắc xích: $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos(u) \cdot 5$.

Thay $u = 5x - 1$ trở lại, ta được: $y' = 5\cos(5x - 1)$.

3. Bảng công thức đạo hàm của các hàm số hợp thường gặp

Từ quy tắc xích, ta có thể suy ra bảng công thức đạo hàm cho các hàm hợp thông dụng.

Hàm hợp $y = f(u(x))$	Đạo hàm y'	Ví dụ
$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$y = (x^3 - 1)^5 \rightarrow y' = 5(x^3 - 1)^4 \cdot (x^3 - 1)' = 5(x^3 - 1)^4 \cdot (3x^2) = 15x^2(x^3 - 1)^4$
$y = \sqrt{u}$	$y' = u' / (2\sqrt{u})$	$y = \sqrt{x^2 + 4} \rightarrow y' = (x^2 + 4)' / (2\sqrt{x^2 + 4}) = 2x / (2\sqrt{x^2 + 4}) = x / \sqrt{x^2 + 4}$
$y = \sin(u)$	$y' = \cos(u) \cdot u'$	$y = \sin(x^2 + x) \rightarrow y' = \cos(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$
$y = \cos(u)$	$y' = -\sin(u) \cdot u'$	$y = \cos(1/x) \rightarrow y' = -\sin(1/x) \cdot (1/x)' = -\sin(1/x) \cdot (-1/x^2) = (1/x^2)\sin(1/x)$
$y = \tan(u)$	$y' = u' / \cos^2(u)$	$y = \tan(3x) \rightarrow y' = (3x)' / \cos^2(3x) = 3 / \cos^2(3x)$
$y = \cot(u)$	$y' = -u' / \sin^2(u)$	$y = \cot(\sqrt{x}) \rightarrow y' = -(\sqrt{x})' / \sin^2(\sqrt{x}) = -[1/(2\sqrt{x})] / \sin^2(\sqrt{x}) = -1 / (2\sqrt{x} \cdot \sin^2(\sqrt{x}))$

IV. Bài tập vận dụng tổng hợp

Dưới đây là một số bài tập kết hợp nhiều quy tắc để rèn luyện kỹ năng.

1. **Bài 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 \cdot \cos(2x)$.

Lời giải:

Đây là đạo hàm của một tích $u \cdot v$ với $u = x^3$ và $v = \cos(2x)$.

$$y' = (x^3)' \cos(2x) + x^3 (\cos(2x))'$$

$$\text{Ta có } (x^3)' = 3x^2.$$

Để tính $(\cos(2x))'$, ta dùng công thức đạo hàm hàm hợp: $(\cos(u))' = -\sin(u) \cdot u'$.

$$(\cos(2x))' = -\sin(2x) \cdot (2x)' = -2\sin(2x).$$

$$\text{Vậy, } y' = 3x^2 \cdot \cos(2x) + x^3 (-2\sin(2x)) = 3x^2 \cos(2x) - 2x^3 \sin(2x).$$

2. **Bài 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = (\sin(x) + 1) / (\cos(x) - 1)$.

Lời giải:

Đây là đạo hàm của một thương u/v .

$$y' = [(\sin(x) + 1)' \cdot (\cos(x) - 1) - (\sin(x) + 1) \cdot (\cos(x) - 1)'] / (\cos(x) - 1)^2$$

$$\text{Ta có: } (\sin(x) + 1)' = \cos(x) \text{ và } (\cos(x) - 1)' = -\sin(x).$$

$$y' = [\cos(x)(\cos(x) - 1) - (\sin(x) + 1)(-\sin(x))] / (\cos(x) - 1)^2$$

$$y' = [\cos^2(x) - \cos(x) + \sin^2(x) + \sin(x)] / (\cos(x) - 1)^2$$

Vì $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, nên:

$$y' = (1 - \cos(x) + \sin(x)) / (\cos(x) - 1)^2.$$

3. **Bài 3:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3(x^2)$.

Lời giải:

Đây là hàm hợp dạng $y = u^3$ với $u = \tan(x^2)$.

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3\tan^2(x^2) \cdot [\tan(x^2)]'.$$

Bây giờ ta cần tính $[\tan(x^2)]'$. Đây lại là một hàm hợp dạng $\tan(v)$ với $v = x^2$.

$$[\tan(x^2)]' = v' / \cos^2(v) = (x^2)' / \cos^2(x^2) = 2x / \cos^2(x^2).$$

Kết hợp lại, ta có:

$$y' = 3\tan^2(x^2) \cdot [2x / \cos^2(x^2)] = (6x \cdot \tan^2(x^2)) / \cos^2(x^2).$$

VIDOCU.COM