

Chuyên đề Tứ giác nội tiếp và các tính chất hình học quan trọng

Tứ giác nội tiếp là một trong những nội dung trọng tâm của chương trình Hình học lớp 9. Nắm vững kiến thức về tứ giác nội tiếp không chỉ giúp giải quyết các bài toán trong sách giáo khoa mà còn là nền tảng cho các bài thi quan trọng.

I. Định nghĩa và Định lý cơ bản

1. Định nghĩa Tứ giác nội tiếp

Một tứ giác được gọi là **nội tiếp một đường tròn** (hay tứ giác nội tiếp) nếu tất cả bốn đỉnh của nó cùng nằm trên một đường tròn. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ví dụ: Tứ giác ABCD có 4 đỉnh A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) thì ABCD là tứ giác nội tiếp đường tròn (O).

2. Định lý thuận

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

Công thức: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), ta có:

- $\angle A + \angle C = 180^\circ$
- $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có $\angle A = 75^\circ$ và $\angle B = 105^\circ$.

Tính số đo các góc còn lại.

Giải:

Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle D = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

Ví dụ 2: Cho tứ giác MNPQ nội tiếp, biết $\angle M = 2x$ và $\angle P = x + 30^\circ$. Tìm x và số đo các góc M, P.

Giải:

Vì MNPQ là tứ giác nội tiếp nên $\angle M + \angle P = 180^\circ$.

Ta có phương trình: $2x + (x + 30^\circ) = 180^\circ$

$$\Leftrightarrow 3x = 150^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 50^\circ.$$

Vậy $\angle M = 2 * 50^\circ = 100^\circ$ và $\angle P = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$.

3. Định lý đảo

Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

Đây là một trong những dấu hiệu quan trọng nhất để chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ: Cho tứ giác ABCD có $\angle B = 110^\circ$ và $\angle D = 70^\circ$. Hỏi tứ giác ABCD có nội tiếp được đường tròn không?

Giải:

Xét tứ giác ABCD, ta có: $\angle B + \angle D = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$.

Theo định lý đảo, tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° thì nội tiếp được một đường tròn. Vậy ABCD là tứ giác nội tiếp.

II. Các dấu hiệu nhận biết Tứ giác nội tiếp

Để chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp, ta có thể sử dụng một trong các dấu hiệu sau:

1. **Tổng hai góc đối bằng 180° :** Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° (Dấu hiệu từ định lý đảo).
2. **Góc nội tiếp cùng chắn một cung:** Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau (α).
3. **Góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện:** Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
4. **Bốn đỉnh cách đều một điểm:** Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp).

Phân tích chi tiết các dấu hiệu

Dấu hiệu	Giải thích	Ví dụ minh họa
1. Tổng hai góc đối bằng 180°	Chứng minh $\angle A + \angle C = 180^\circ$ hoặc $\angle B + \angle D = 180^\circ$.	Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Tứ giác AEHF có $\angle AEH = \angle AFH = \angle EAF = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Do đó $\angle EHF = 90^\circ$. Suy ra $\angle EAF + \angle EHF = 180^\circ$. Vậy AEHF nội tiếp.
2. Hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới góc bằng nhau	Chứng minh hai đỉnh kề nhau (ví dụ A và B) cùng nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại (CD) dưới một góc không đổi. Tức là $\angle CAD = \angle CBD$.	Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Xét tứ giác BEDC, ta có $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$. Hai đỉnh E và D kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới một góc 90°. Vậy tứ giác BEDC nội tiếp.
3. Góc ngoài bằng góc trong đối diện	Chứng minh góc ngoài tại đỉnh A bằng góc trong tại đỉnh C ($\angle xAB = \angle C$, với Ax là tia đối của AD).	Trong tứ giác nội tiếp ABCD, kẻ tia Bx là tia đối của tia BC. Ta có $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Mà $\angle ABC + \angle ABx = 180^\circ$ (kề bù). Suy ra $\angle ADC = \angle ABx$.

Dấu hiệu	Giải thích	Ví dụ minh họa
4. Bốn đỉnh cách đều một điểm	Tìm một điểm O sao cho $OA = OB = OC = OD$. O chính là tâm đường tròn ngoại tiếp.	Hình chữ nhật ABCD có giao điểm hai đường chéo là O. Ta có $OA = OB = OC = OD$. Vậy hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O.

III. Các tính chất và Định lý nâng cao

1. Định lý Ptolemy (P-tô-lê-mê)

Đây là một định lý rất mạnh liên quan đến độ dài cạnh và đường chéo của tứ giác nội tiếp.

Phát biểu: Trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng của tích các cặp cạnh đối.

Công thức: Với tứ giác nội tiếp ABCD: **$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$**

Ví dụ: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn, có $AB = 3, BC = 5, CD = 5, AD = 8$. Tính tích hai đường chéo $AC \cdot BD$.

Giải:

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp ABCD, ta có:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$
$$AC \cdot BD = 3 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 15 + 40 = 55.$$

2. Công thức Brahmagupta (Tính diện tích)

Công thức này dùng để tính diện tích của một tứ giác nội tiếp khi biết độ dài bốn cạnh.

Công thức: Cho tứ giác nội tiếp ABCD có độ dài các cạnh là a, b, c, d. Diện tích S được tính bởi: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ trong đó $p = (a+b+c+d)/2$ là nửa chu vi của tứ giác.

Ví dụ: Tính diện tích tứ giác nội tiếp có các cạnh lần lượt là 2, 3, 4, 5.

Giải:

Ta có $a=2, b=3, c=4, d=5$.

Nửa chu vi: $p = (2+3+4+5)/2 = 14/2 = 7$.

Áp dụng công thức Brahmagupta:

$S = \sqrt{(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)} = \sqrt{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$ (đơn vị diện tích).

IV. Các dạng bài tập vận dụng

Dạng 1: Chứng minh một tứ giác là tứ giác nội tiếp

Bài toán: Cho tam giác ABC nhọn (AB AC) nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. a) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp. b) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp.

Hướng dẫn giải:

a) Xét tứ giác BCEF, ta có:

BE là đường cao $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$.

CF là đường cao $\Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \angle BFC = 90^\circ$.

Tứ giác BCEF có hai đỉnh kề E và F cùng nhìn cạnh BC dưới một góc 90° ($\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$). Do đó, BCEF là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu 2).

b) Xét tứ giác AEHF, ta có:

$\angle AEH = 90^\circ$ (do $BE \perp AC$)

$\angle AFH = 90^\circ$ (do $CF \perp AB$)

Tổng hai góc đối: $\angle AEH + \angle AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Do đó, AEHF là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu 1).

Dạng 2: Sử dụng tính chất tứ giác nội tiếp để chứng minh các yếu tố khác

Bài toán: Từ bài toán trên, gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEH.

Hướng dẫn giải:

Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF. Do $\angle AEH = 90^\circ$, tâm I là trung điểm của AH.

Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn tâm M (vì trong tam giác vuông BEC, M là trung điểm cạnh huyền BC nên $MB=ME=MC$).

Ta có $\triangle MEF$ cân tại M $\Rightarrow \angle MEF = \angle MFE$.

Trong đường tròn (M), $\angle MFC = \angle MBC$ (cùng chắn cung MC).

Trong đường tròn (O), $\angle EBC = \angle EAC$ (cùng chắn cung EC).

Suy ra $\angle MFE = \angle EAC$.

Lại có, $\triangle AEH$ vuông tại E có I là trung điểm AH $\Rightarrow IE = IA \Rightarrow \triangle IEA$ cân tại I $\Rightarrow \angle IEA = \angle IAE = \angle HAE$.

Ta cần chứng minh $ME \perp IE$, tức là $\angle MEI = 90^\circ$.

Ta có $\angle MEI = \angle MEF + \angle FEI$. (Cần xem lại cách chứng minh này, có thể phức tạp hơn).

Cách khác: Ta chứng minh $\angle MEH = \angle MAH$. Từ đó suy ra các tính chất tiếp theo.

Việc sử dụng góc nội tiếp là chìa khóa để liên kết các góc với nhau.