

Chuyên đề: Vị trí tương đối của hai đường tròn - Tiếp xúc

Trong chương trình Hình học lớp 9, việc xét vị trí tương đối của hai đường tròn là một phần kiến thức quan trọng. Chuyên đề này tập trung vào trường hợp hai đường tròn tiếp xúc nhau, bao gồm tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, cung cấp đầy đủ lý thuyết và các dạng bài tập thường gặp.

I. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa hai đường tròn tiếp xúc

Hai đường tròn được gọi là **tiếp xúc nhau** nếu chúng chỉ có một điểm chung duy nhất. Điểm chung đó được gọi là **tiếp điểm**.

Có hai trường hợp tiếp xúc:

a. Tiếp xúc ngoài

Định nghĩa: Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ được gọi là tiếp xúc ngoài nếu tâm O và O' nằm khác phía so với tiếp điểm.

Hệ thức: Khoảng cách giữa hai tâm bằng tổng hai bán kính.

$$OO' = R + r$$

Giải thích: Nếu gọi A là tiếp điểm chung, thì ba điểm O, A, O' thẳng hàng và A nằm giữa O và O' . Khi đó, độ dài đoạn nối tâm OO' chính bằng tổng của hai bán kính OA và $O'A$.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 6$ cm và đường tròn (O') có bán kính $r = 2$ cm. Khoảng cách giữa hai tâm $OO' = 8$ cm. Nhận xét vị trí tương đối của hai đường tròn.

Giải:

- Ta có tổng hai bán kính: $R + r = 6 + 2 = 8$ cm.
- Khoảng cách hai tâm $OO' = 8$ cm.
- Vì $OO' = R + r$ ($8 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$), nên hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau.

Ví dụ 2: Một đường tròn tâm I có bán kính 4 cm. Một đường tròn tâm K tiếp xúc ngoài với nó. Biết khoảng cách $IK = 9$ cm. Tìm bán kính của đường tròn (K).

Giải:

- Gọi bán kính của đường tròn (I) là $R = 4$ cm và bán kính của đường tròn (K) là r .
- Vì hai đường tròn tiếp xúc ngoài, ta có hệ thức: $IK = R + r$.
- Thay số: $9 = 4 + r$.
- Suy ra $r = 9 - 4 = 5$ cm.
- Vậy bán kính của đường tròn (K) là 5 cm.

b. Tiếp xúc trong

Định nghĩa: Hai đường tròn (O; R) và (O'; r) được gọi là tiếp xúc trong nếu tâm O và O' nằm cùng phía so với tiếp điểm.

Hệ thức: Khoảng cách giữa hai tâm bằng hiệu hai bán kính (giả sử $R > r$).

$$OO' = R - r$$

Giải thích: Nếu gọi A là tiếp điểm chung, thì ba điểm O, O', A thẳng hàng và O' nằm giữa O và A. Khi đó, độ dài đoạn nối tâm OO' chính bằng hiệu của bán kính lớn OA và bán kính nhỏ O'A.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) có bán kính $R = 7$ cm và đường tròn (O') có bán kính $r = 3$ cm. Khoảng cách giữa hai tâm $OO' = 4$ cm. Nhận xét vị trí tương đối của hai đường tròn.

Giải:

- Ta có hiệu hai bán kính: $R - r = 7 - 3 = 4$ cm.
- Khoảng cách hai tâm $OO' = 4$ cm.
- Vì $OO' = R - r$ ($4 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$), nên hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau.

Ví dụ 2: Đường tròn (O; 10 cm) và đường tròn (O') tiếp xúc trong với nhau tại A. Biết $OO' = 6$ cm. Tính bán kính của đường tròn (O').

Giải:

- Gọi bán kính của (O) là $R = 10$ cm và của (O') là r .
- Vì hai đường tròn tiếp xúc trong, ta có hệ thức: $OO' = |R - r|$.
- Thay số: $6 = |10 - r|$.
- Trường hợp 1: $10 - r = 6 \Rightarrow r = 4$ cm.
- Trường hợp 2: $10 - r = -6 \Rightarrow r = 16$ cm (Loại vì khi đó (O') là đường tròn lớn hơn, $R < r$, mâu thuẫn).

- Vậy bán kính của đường tròn (O') là 4 cm.

2. Tính chất đường nối tâm

Định lý: Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

Chứng minh:

- **Trường hợp tiếp xúc ngoài:** Gọi A là tiếp điểm của $(O;R)$ và $(O';r)$. Ta có $OA = R$, $O'A = r$. Theo bất đẳng thức tam giác trong $\triangle OO'A$, ta có $OO' \leq OA + O'A = R + r$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A nằm giữa O và O' . Vì hai đường tròn tiếp xúc ngoài nên $OO' = R + r$. Do đó, A nằm giữa O và O' , tức là A thuộc đoạn thẳng OO' .
- **Trường hợp tiếp xúc trong ($R > r$):** Gọi A là tiếp điểm. Ta có $OA = R$, $O'A = r$. Trong $\triangle OO'A$, ta có $OA \leq OO' + O'A$, suy ra $OO' \geq OA - O'A = R - r$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi O' nằm giữa O và A. Vì hai đường tròn tiếp xúc trong nên $OO' = R - r$. Do đó, O' nằm giữa O và A, tức là A nằm trên tia đối của tia $O'O$.

Tính chất này là cơ sở để giải quyết rất nhiều bài toán chứng minh và tính toán liên quan đến hai đường tròn tiếp xúc.

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn tiếp xúc

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

a. Trường hợp tiếp xúc ngoài

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài có **3 tiếp tuyến chung**:

- **2 tiếp tuyến chung ngoài:** Là hai đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn và không cắt đoạn nối tâm OO' .
- **1 tiếp tuyến chung trong:** Là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn tại tiếp điểm chung của chúng. Đường thẳng này vuông góc với đường nối tâm OO' tại tiếp điểm.

b. Trường hợp tiếp xúc trong

Hai đường tròn tiếp xúc trong chỉ có **1 tiếp tuyến chung duy nhất**.

- Đây là tiếp tuyến chung ngoài, đi qua tiếp điểm và vuông góc với đường nối tâm OO' tại tiếp điểm.

Bảng tổng kết số tiếp tuyến chung:

Vị trí tương đối	Hệ thức	Số tiếp tuyến chung
Ngoài nhau	$OO' > R + r$	4
Tiếp xúc ngoài	$OO' = R + r$	3
Cắt nhau	$R - r < OO' < R + r$	2
Tiếp xúc trong	$OO' = R - r$	1
Đựng nhau	$OO' < R - r$	0

II. Các dạng bài tập vận dụng

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối khi biết bán kính và khoảng cách hai tâm

Phương pháp: So sánh khoảng cách hai tâm OO' với tổng $R + r$ và hiệu $|R - r|$.

Ví dụ: Cho hai đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và $(O'; 2\text{cm})$. Xác định vị trí tương đối của chúng trong các trường hợp sau:

1. $OO' = 7\text{ cm}$
2. $OO' = 3\text{ cm}$
3. $OO' = 6\text{ cm}$

Giải:

Ta có: $R = 5\text{ cm}$, $r = 2\text{ cm}$.

Tổng hai bán kính: $R + r = 5 + 2 = 7\text{ cm}$.

Hiệu hai bán kính: $R - r = 5 - 2 = 3\text{ cm}$.

1. Khi $OO' = 7\text{ cm}$: Vì $OO' = R + r$, hai đường tròn **tiếp xúc ngoài**.
2. Khi $OO' = 3\text{ cm}$: Vì $OO' = R - r$, hai đường tròn **tiếp xúc trong**.
3. Khi $OO' = 6\text{ cm}$: Vì $R - r < OO' < R + r$ ($3 < 6 < 7$), hai đường tròn **cắt nhau**.

Dạng 2: Tính toán độ dài đoạn thẳng, góc trong bài toán hai đường tròn tiếp xúc

Phương pháp: Vận dụng tính chất đường nối tâm, tính chất tiếp tuyến, định lý Pytago, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, tam giác đồng dạng.

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn $(O; 9\text{cm})$ và $(O'; 4\text{cm})$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O), C \in (O')$).

a) Chứng minh tứ giác OBCO' là hình thang vuông.

b) Tính độ dài đoạn thẳng BC.

Giải:

a) Vì BC là tiếp tuyến của (O) tại B nên $OB \perp BC$.

Vì BC là tiếp tuyến của (O') tại C nên $O'C \perp BC$.

Do đó, $OB \parallel O'C$ (cùng vuông góc với BC).

Vậy tứ giác OBCO' là hình thang vuông tại B và C.

b) Kẻ $O'H \perp OB$ tại H. Tứ giác HBCO' là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông).

Suy ra: $BC = O'H$ và $HB = O'C = 4\text{ cm}$.

Ta có: $OH = OB - HB = 9 - 4 = 5\text{ cm}$.

Vì (O) và (O') tiếp xúc ngoài nên $OO' = R + r = 9 + 4 = 13\text{ cm}$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông OHO' , ta có:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2$$

$$\Rightarrow 13^2 = 5^2 + O'H^2$$

$$\Rightarrow O'H^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\Rightarrow O'H = 12\text{ cm}.$$

Vậy $BC = 12\text{ cm}$.

Dạng 3: Bài toán chứng minh

Phương pháp: Sử dụng linh hoạt các tính chất đã học về hai đường tròn tiếp xúc, đặc biệt là tính chất đường nối tâm và tính chất của tiếp tuyến chung.

Ví dụ: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O)$, $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung trong tại A cắt BC tại I .

a) Chứng minh $IB = IC = IA$.

b) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

Giải:

a) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:

- Xét đường tròn (O) , ta có hai tiếp tuyến tại B và A cắt nhau tại I . Do đó, **$IA = IB$** .
- Xét đường tròn (O') , ta có hai tiếp tuyến tại C và A cắt nhau tại I . Do đó, **$IA = IC$** .

Từ hai điều trên, suy ra $IB = IC = IA$.

b) Xét tam giác ABC , có AI là đường trung tuyến (vì $IB = IC$).

Mặt khác, ta có $AI = IB = IC$, nên độ dài đường trung tuyến AI bằng một nửa cạnh đối diện BC ($AI = BC/2$).

Theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác, nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

Vậy tam giác ABC vuông tại A .