CHUYÊN ĐỀ VECTƠ: PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ HAI VECTƠ

Trong vật lý, khi hai lực cùng tác động vào một vật, hợp lực của chúng được xác định theo quy tắc hình bình hành. Quy tắc này chính là một ứng dụng của phép cộng vectơ. Bài học này sẽ tổng hợp đầy đủ các kiến thức về phép cộng và phép trừ hai vectơ, nền tảng quan trọng trong chương trình Hình học 10.

I. Phép cộng hai vectơ

1. Định nghĩa tổng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\vec{AB} = \vec{a}$ và $\vec{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\vec{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Công thức: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 3, AD = 4. Gọi M là trung điểm của BC. Tính tổng của hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AM}$.
  Phân tích: Ta không thể cộng trực tiếp. Ta cần tìm một vectơ bằng vectơ $\vec{AM}$ mà có điểm đầu là B. Tuy nhiên, cách tiếp cận này phức tạp. Ta sẽ sử dụng các quy tắc cộng sẽ học dưới đây để giải quyết dễ dàng hơn.

VIDOCU.COM

- **Ví dụ 2:** Một con thuyền di chuyển từ bờ A sang bờ B của một dòng sông với vận tốc riêng là $\vec{v_t}$. Dòng nước chảy với vận tốc $\vec{v_n}$. Vận tốc thực tế của con thuyền là tổng của hai vận tốc trên: $\vec{v} = \vec{v_t} + \vec{v_n}$.

2. Các quy tắc cộng vectơ

Để đơn giản hóa việc tìm tổng hai vectơ, ta có các quy tắc sau:

a. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có:

Công thức: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Giải thích: Quy tắc này dùng để cộng hai vectơ mà điểm cuối của vectơ thứ nhất trùng với điểm đầu của vectơ thứ hai. Kết quả là vectơ có điểm đầu là điểm đầu của vectơ thứ nhất và điểm cuối là điểm cuối của vectơ thứ hai.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho 4 điểm A, B, C, D. Rút gọn biểu thức $P = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$.

  Giải: Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

  $P = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

- **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng $\vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{AP}$.

  Giải: Áp dụng quy tắc ba điểm liên tiếp:

  Vế trái = $(\vec{AM} + \vec{MN}) + \vec{NP} = \vec{AN} + \vec{NP} = \vec{AP}$ (Vế phải). Vậy đẳng thức được chứng minh.

VIDOCU.COM

b. Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành ABCD, ta có:

Công thức: $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

Giải thích: Nếu hai vectơ có chung điểm đầu (A), tổng của chúng là vectơ đường chéo (AC) của hình bình hành được tạo bởi hai vectơ đó.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O, AB = 3, AD = 4. Tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

  Giải: Vì ABCD là hình chữ nhật (cũng là hình bình hành), theo quy tắc hình bình hành, ta có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

  Do đó, $|\vec{u}| = |\vec{AC}| = AC$.

  Xét tam giác vuông ABC, theo định lý Pytago: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

  Vậy độ dài vectơ $\vec{u}$ là 5.

- **Ví dụ 2:** Cho hình thoi ABCD cạnh a, góc BAD = 60 độ. Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$.

  Giải: Theo quy tắc hình bình hành, $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

  Do ABCD là hình thoi có góc A = 60 độ nên tam giác ABD là tam giác đều, suy ra BD = a.

  Tam giác ABC là tam giác cân tại B. Để tính AC, ta gọi O là giao điểm hai đường chéo. AO vuông góc với BD. $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = a\sqrt{3}/2$.

  Vậy $AC = 2AO = a\sqrt{3}$. Do đó, $|\vec{AB} + \vec{AD}| = AC = a\sqrt{3}$.

VIDOCU.COM

II. Tính chất của phép cộng các vectơ

Phép cộng vectơ có các tính chất tương tự phép cộng các số:

- **Tính chất giao hoán:** Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kỳ, ta có:

  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- **Tính chất kết hợp:** Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kỳ, ta có:

  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

- **Tính chất của vectơ-không:** Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có:

  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

Ví dụ về áp dụng tính chất:

Rút gọn biểu thức $M = \vec{PQ} + \vec{RS} + \vec{QR} + \vec{SP}$.

Giải: Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp, ta nhóm các vectơ thích hợp:

$M = (\vec{PQ} + \vec{QR}) + (\vec{RS} + \vec{SP})$

Áp dụng quy tắc ba điểm:

$M = \vec{PR} + \vec{RP}$

Hai vectơ $\vec{PR}$ và $\vec{RP}$ là hai vectơ đối nhau nên tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vậy $M = \vec{0}$.

III. Phép trừ hai vectơ

1. Vectơ đối

Định nghĩa: Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là một vectơ có cùng độ dài nhưng ngược hướng với vectơ $\vec{a}$. Kí hiệu là $-\vec{a}$.

Tính chất:

VIDOCU.COM

- Mọi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của $\vec{0}$ là chính nó.
- Tổng của một vectơ với vectơ đối của nó luôn bằng vectơ-không: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
- Với hai điểm A, B, ta có: $\vec{BA}$ là vectơ đối của $\vec{AB}$, tức là $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác đều ABC cạnh a. Vectơ đối của $\vec{BC}$ là vectơ $\vec{CB}$. Cả hai đều có độ dài là a.
- **Ví dụ 2:** Cho hình bình hành ABCD. Vectơ đối của $\vec{AB}$ là $\vec{BA}$ hoặc $\vec{CD}$ (vì $\vec{CD}$ cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{AB}$).

2. Định nghĩa hiệu của hai vectơ

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của $\vec{b}$.

Công thức: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

3. Quy tắc trừ

Với ba điểm O, A, B bất kỳ, ta có:

Công thức: $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$

Giải thích: Quy tắc này dùng để tìm hiệu hai vectơ có chung điểm đầu (O). Kết quả là vectơ có điểm đầu là điểm cuối của vectơ trừ (A) và điểm cuối là điểm cuối của vectơ bị trừ (B).

VIDOCU.COM

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC. Hãy biểu diễn vectơ $\vec{AB}$ theo các vectơ có điểm đầu là C.

  Giải: Áp dụng quy tắc trừ, ta có: $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$.

- **Ví dụ 2:** Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD}$.

  Giải:

  Vế trái: $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ (theo quy tắc trừ).

  Vế phải: $\vec{CB} - \vec{CD} = \vec{DB}$ (theo quy tắc trừ).

  Vì vế trái bằng vế phải, đẳng thức được chứng minh.

IV. So sánh các quy tắc và vận dụng

Bảng tóm tắt các quy tắc cơ bản:

Quy tắc	Công thức	Đặc điểm nhận dạng
Quy tắc ba điểm (cộng)	$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$	Nối tiếp nhau (điểm cuối vectơ trước là điểm đầu vectơ sau).
Quy tắc hình bình hành (cộng)	$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$	Chung điểm đầu.
Quy tắc trừ	$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$	Chung điểm đầu.

VIDOCU.COM

Bài tập vận dụng tổng hợp

Ví dụ 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$.

Giải:

Ta sẽ chèn điểm A và D vào vectơ $\vec{MN}$ theo quy tắc ba điểm.

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}$ (1)

Tương tự, ta chèn điểm D và C:

$\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN}$ (2)

Cộng vế theo vế của (1) và (2):

$2\vec{MN} = (\vec{MA} + \vec{MD}) + (\vec{BN} + \vec{CN}) + \vec{AB} + \vec{DC}$

Vì M là trung điểm AD nên $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{0}$.

Vì N là trung điểm BC nên $\vec{BN} + \vec{CN} = \vec{0}$ (do $\vec{CN} = -\vec{NC}$ và $\vec{BN} = \vec{NC}$ là sai, phải là $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$. $\vec{BN}$ và $\vec{CN}$ không đối nhau. Chỉnh lại: $\vec{BN}$ và $\vec{NC}$ là hai vectơ bằng nhau, nhưng $\vec{CN} = -\vec{NC}$ nên $\vec{BN} + \vec{CN} = \vec{BN} - \vec{NC} \ne \vec{0}$. Ta cần có $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$).

Do N là trung điểm BC nên $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$. Ta có $\vec{BN} = -\vec{NB}$ và $\vec{CN} = -\vec{NC}$. Do đó $\vec{BN} + \vec{CN} = -(\vec{NB} + \vec{NC}) = -\vec{0} = \vec{0}$.

Vậy $2\vec{MN} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{AB} + \vec{DC}$.

Suy ra $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$ (đpcm).

VIDOCU.COM

Ví dụ 2: Tìm tập hợp điểm

Cho hai điểm A, B cố định. Tìm tập hợp điểm M sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$.

Giải:

Gọi I là trung điểm của AB. Theo quy tắc trung điểm (một hệ quả của quy tắc cộng), ta có $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

Theo quy tắc trừ, ta có $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$.

Đẳng thức đã cho trở thành: $|2\vec{MI}| = |\vec{BA}|$.

$2|\vec{MI}| = |\vec{BA}| \Rightarrow 2MI = BA$.

$MI = \frac{BA}{2}$.

Vì A, B cố định nên độ dài đoạn AB không đổi. Do đó, điểm M luôn cách trung điểm I của AB một khoảng không đổi R = AB/2.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I (trung điểm của AB) và bán kính R = AB/2.

VIDOCU.COM