

Tổng hợp phương pháp giải phương trình mũ: Đặt ẩn phụ và Logarit hóa

Trong chương trình Toán lớp 12, phương trình mũ là một nội dung quan trọng và thường xuất hiện trong các kỳ thi. Bên cạnh các phương pháp cơ bản như đưa về cùng cơ số, có hai phương pháp nâng cao hiệu quả để giải quyết các bài toán phức tạp hơn là **đặt ẩn phụ** và **logarit hóa**. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa chi tiết hai phương pháp này.

Phương pháp 1: Giải phương trình mũ bằng cách đặt ẩn phụ

Đây là phương pháp biến đổi phương trình mũ ban đầu thành một phương trình đại số quen thuộc (như phương trình bậc hai, bậc ba,...) bằng cách đặt một ẩn phụ thích hợp.

Dạng 1: Đưa về phương trình bậc hai, bậc ba

Phương pháp này áp dụng khi các số hạng trong phương trình có thể biểu diễn qua một lũy thừa chung.

- **Dạng tổng quát:** $a \cdot [k^{f(x)}]^2 + b \cdot [k^{f(x)}] + c = 0$ (hoặc bậc cao hơn).
- **Cách giải:**

1. Biến đổi phương trình về dạng tổng quát trên.
2. Đặt ẩn phụ $t = k^{(f(x))}$. Lưu ý điều kiện quan trọng: $t > 0$.
3. Thay vào phương trình, ta được một phương trình đại số theo t : $a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$.
4. Giải phương trình tìm t , so sánh với điều kiện $t > 0$ để nhận các nghiệm hợp lệ.
5. Với mỗi nghiệm t thỏa mãn, ta giải phương trình mũ cơ bản $k^{(f(x))} = t$ để tìm x .

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

Phân tích: Ta nhận thấy $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$. Do đó, phương trình có thể đưa về dạng bậc hai theo 3^x .

Bài giải:

1. Phương trình đã cho tương đương với: $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
2. Đặt $t = 3^x$. Điều kiện: $t > 0$.
3. Phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$.
4. Giải phương trình bậc hai theo t , ta có hai nghiệm: $t = 1$ hoặc $t = 3$.
5. Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện $t > 0$. Ta xét hai trường hợp:
 - Với $t = 1$, ta có $3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$.
 - Với $t = 3$, ta có $3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$.

6. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $4^{(x+1)} - 6 \cdot 2^{(x+1)} + 8 = 0$.

Phân tích: Ta biến đổi các lũy thừa để xuất hiện 2^x : $4^{(x+1)} = 4 \cdot 4^x = 4 \cdot (2^x)^2$ và $2^{(x+1)} = 2 \cdot 2^x$.

Bài giải:

1. Phương trình tương đương: $4 \cdot 4^x - 6 \cdot 2 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 4 \cdot (2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 8 = 0$.

2. Chia cả hai vế cho 4: $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

3. Đặt $t = 2^x$ (Điều kiện: $t > 0$).

4. Phương trình trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0$.

5. Giải ra ta được $t = 1$ hoặc $t = 2$ (cả hai đều thỏa mãn $t > 0$).

6.

- Với $t = 1$, $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

- Với $t = 2$, $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

7. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1\}$.

Dạng 2: Phương trình đẳng cấp

Phương trình có dạng đẳng cấp đối với hai cơ số khác nhau.

• **Dạng tổng quát:** $a \cdot A^{(2f(x))} + b \cdot (A \cdot B)^{(f(x))} + c \cdot B^{(2f(x))} = 0$.

• **Cách giải:**

1. Chia cả hai vế của phương trình cho $B^{(2f(x))}$ (hoặc $A^{(2f(x))}$), giả sử $B^{(2f(x))} \neq 0$, điều này luôn đúng).
2. Phương trình trở thành: $a. (A/B)^{(2f(x))} + b. (A/B)^{(f(x))} + c = 0$.
3. Đây là phương trình dạng 1. Ta đặt $t = (A/B)^{(f(x))}$ (với $t > 0$) và giải tương tự.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 3: Giải phương trình $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$.

Phân tích: Ta thấy $9^x = (3^2)^x$, $4^x = (2^2)^x$, và $6^x = (2.3)^x$. Đây là dạng đẳng cấp với $A=3$, $B=2$.

Bài giải:

1. Chia cả hai vế của phương trình cho 4^x (luôn dương), ta được:

$$6.(9^x/4^x) - 13.(6^x/4^x) + 6.(4^x/4^x) = 0$$

$$\Rightarrow 6.(9/4)^x - 13.(6/4)^x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 6.[(3/2)^x]^2 - 13.(3/2)^x + 6 = 0$$
2. Đặt $t = (3/2)^x$ (Điều kiện: $t > 0$).
3. Phương trình trở thành: $6t^2 - 13t + 6 = 0$.
4. Giải phương trình bậc hai, ta được hai nghiệm: $t = 3/2$ hoặc $t = 2/3$ (cả hai đều thỏa mãn).
5.
 - Với $t = 3/2$, ta có $(3/2)^x = 3/2 \Rightarrow x = 1$.
 - Với $t = 2/3$, ta có $(3/2)^x = 2/3 \Rightarrow (3/2)^x = (3/2)^{(-1)} \Rightarrow x = -1$.

6. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1\}$.

Phương pháp 2: Giải phương trình mũ bằng cách logarit hóa

Phương pháp này được sử dụng khi hai vế của phương trình là các lũy thừa có cơ số khác nhau và không thể đưa về cùng một cơ số. Ý tưởng chính là lấy logarit hai vế theo một cơ số thích hợp (thường là cơ số 10 hoặc cơ số e).

Dạng 1: Phương trình $a^{f(x)} = b$

- **Công thức:** Với $a, b > 0, a \neq 1$, ta có $a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a(b)$.
- **Cách giải:** Đây là định nghĩa của logarit, ta chỉ cần áp dụng trực tiếp công thức.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 4: Giải phương trình $3^{(2x - 1)} = 5$.

Bài giải:

1. Áp dụng công thức logarit, phương trình tương đương:

$$2x - 1 = \log_3(5)$$

2. Chuyển vế để tìm x:

$$2x = 1 + \log_3(5)$$

$$\Rightarrow x = (1 + \log_3(5)) / 2$$

3. Vậy, nghiệm của phương trình là $x = (1 + \log_3(5)) / 2$.

Dạng 2: Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

• Cách giải:

1. Lấy logarit hai vế theo một cơ số $c > 0, c \neq 1$ (thường chọn $c = 10$ hoặc $c = e$).

$$\log_c(a^{f(x)}) = \log_c(b^{g(x)})$$

2. Sử dụng công thức $\log_c(M^?) = ? \cdot \log_c(M)$ để hạ số mũ xuống:
 $f(x) \cdot \log_c(a) = g(x) \cdot \log_c(b)$

3. Đây là một phương trình đại số theo x (thường là bậc nhất hoặc bậc hai).
Giải phương trình này để tìm x .

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 5: Giải phương trình $2^{(x+1)} = 3^{(x-2)}$.

Bài giải:

1. Lấy logarit tự nhiên ($\ln$) cả hai vế của phương trình:

$$\ln(2^{(x+1)}) = \ln(3^{(x-2)})$$

2. Áp dụng công thức hạ số mũ:

$$(x+1)\ln(2) = (x-2)\ln(3)$$

3. Đây là phương trình bậc nhất đối với x . Ta tiến hành nhân phá và nhóm các số hạng chứa x :

$$x \cdot \ln(2) + \ln(2) = x \cdot \ln(3) - 2 \cdot \ln(3)$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(3) - x \cdot \ln(2) = \ln(2) + 2 \cdot \ln(3)$$

$$\Rightarrow x(\ln(3) - \ln(2)) = \ln(2) + \ln(3^2)$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(3/2) = \ln(2) + \ln(9)$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(3/2) = \ln(18)$$

4. Giải tìm x:

$$x = \ln(18) / \ln(3/2) \text{ hoặc có thể viết là } x = \log_{(3/2)}(18).$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $5^{(x^2)} = 7^x$.

Bài giải:

1. Điều kiện: x thuộc R. Lấy logarit cơ số 10 (log) hai vế:

$$\log(5^{(x^2)}) = \log(7^x)$$

2. Hạ số mũ:

$$x^2 \cdot \log(5) = x \cdot \log(7)$$

3. Chuyển vế và đặt nhân tử chung:

$$x^2 \cdot \log(5) - x \cdot \log(7) = 0$$

$$\Rightarrow x(x \cdot \log(5) - \log(7)) = 0$$

4. Phương trình tích này cho ta hai trường hợp:

○ $x = 0$

○ $x \cdot \log(5) - \log(7) = 0 \Rightarrow x \cdot \log(5) = \log(7) \Rightarrow x = \log(7) / \log(5) = \log_5(7)$

5. Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; \log_5(7)\}$.

Bảng so sánh hai phương pháp

Tiêu chí	Phương pháp Đặt ẩn phụ	Phương pháp Logarit hóa
Dấu hiệu nhận biết	Phương trình chứa các lũy thừa có thể biểu diễn qua một lũy thừa chung (ví dụ $a^{(2x)}$, a^x) hoặc có dạng đẳng cấp.	Phương trình chứa các lũy thừa có cơ số khác nhau, không thể đưa về cùng cơ số.
Các bước chính	1. Biến đổi phương trình. 2. Đặt ẩn phụ $t > 0$. 3. Giải phương trình đại số theo t. 4. Thay t tìm được để giải tìm x.	1. Lấy logarit hai vế theo cơ số phù hợp. 2. Dùng tính chất logarit để hạ số mũ. 3. Giải phương trình đại số thu được để tìm x.
Ưu điểm	Đưa bài toán phức tạp về dạng phương trình đại số quen thuộc, dễ giải. Nghiệm tìm được thường là số đẹp (nguyên, hữu tỉ).	Giải được một lớp các bài toán rộng hơn, đặc biệt khi cơ số không có mối liên hệ. Là phương pháp tổng quát.
Lưu ý quan trọng	Bắt buộc phải đặt điều kiện cho ẩn phụ ($t > 0$) và kiểm tra lại nghiệm t trước khi giải tìm x .	Cần nắm vững các công thức biến đổi logarit. Nghiệm tìm được thường ở dạng logarit, công kênh hơn.

Bài tập vận dụng

1. **Bài 1:** Giải phương trình $4^x - 2^{(x+3)} + 12 = 0$.

Hướng dẫn: Viết lại phương trình thành $(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$. Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$).

2. **Bài 2:** Giải phương trình $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$.

Hướng dẫn: Viết lại phương trình thành $2 \cdot (4^x)^2 - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$. Đặt $t = 4^x$ ($t > 0$).

3. **Bài 3:** Giải phương trình $5^{(x-1)} = 3^{(2x+1)}$.

Hướng dẫn: Lấy ln hoặc log hai vế. Ta được $(x-1)\ln(5) = (2x+1)\ln(3)$.
Giải phương trình bậc nhất tìm x.

4. **Bài 4:** Giải phương trình $(\sqrt{5}+2)^x - (\sqrt{5}-2)^x = 2$.

Hướng dẫn: Nhận xét $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 5 - 4 = 1$, suy ra $(\sqrt{5}-2) = 1/(\sqrt{5}+2) = (\sqrt{5}+2)^{-1}$. Đặt $t = (\sqrt{5}+2)^x$ ($t > 0$). Phương trình trở thành $t - 1/t = 2$.