

Tổng hợp kiến thức: Tính thể tích khối đa diện bằng phương pháp tọa độ hóa

Phương pháp tọa độ hóa là một công cụ mạnh mẽ trong hình học không gian, giúp chuyển các bài toán hình học phức tạp về dạng bài toán đại số giải tích. Việc áp dụng phương pháp này đặc biệt hiệu quả đối với các bài toán tính thể tích khi gặp khó khăn trong việc xác định chiều cao hoặc diện tích đáy theo cách truyền thống.

1. Nguyên tắc chung và các bước thực hiện

a. Nguyên tắc

Gắn một hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz vào không gian chứa khối đa diện, sau đó xác định tọa độ các đỉnh của khối đa diện đó. Cuối cùng, sử dụng các công thức giải tích để tính toán thể tích.

b. Các bước thực hiện

- Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp.** Đây là bước quan trọng nhất, quyết định độ phức tạp của việc tính toán. Ta thường chọn gốc tọa độ O tại một đỉnh của khối đa diện, và các trục tọa độ Ox, Oy, Oz đi qua hoặc song song với các cạnh của khối đa diện.
- Bước 2: Xác định tọa độ các đỉnh.** Dựa vào hệ trục đã chọn và các giả thiết của bài toán (độ dài cạnh, góc,...) để tìm tọa độ tất cả các đỉnh cần thiết

của khối đa diện.

3. **Bước 3: Áp dụng công thức tính thể tích.** Sử dụng các công thức tính thể tích dựa trên tọa độ đỉnh đã xác định.

c. **Hướng dẫn chọn hệ trục tọa độ**

Việc chọn hệ trục tọa độ thông minh sẽ giúp bài toán trở nên đơn giản hơn. Dưới đây là một số trường hợp thường gặp:

Dạng hình	Cách chọn hệ trục
Hình lập phương, hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'	Chọn gốc O trùng với một đỉnh, ví dụ A. Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AA'.
Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy (ví dụ SA ⊥ (ABCD))	Chọn gốc O trùng với chân đường cao, ví dụ A. Trục Oz trùng với SA. Hai trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng đáy và vuông góc với nhau.
Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông	Chọn gốc O trùng với đỉnh góc vuông của đáy. Hai trục Ox, Oy trùng với hai cạnh góc vuông. Trục Oz song song với cạnh bên.
Hình chóp đều (ví dụ S.ABC hoặc S.ABCD)	Chọn gốc O là tâm của đa giác đáy. Trục Oz đi qua đỉnh S. Các trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng đáy.

2. Các công thức tính thể tích bằng tọa độ

a. Thể tích khối tứ diện

Cho tứ diện ABCD với tọa độ các đỉnh A, B, C, D đã biết.

- **Công thức:** Thể tích khối tứ diện ABCD được tính bằng công thức tích hỗn tạp: $V_{ABCD} = (1/6) |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

- **Giải thích:**

- $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ là các vector có điểm đầu chung là A.
- $[\vec{AB}, \vec{AC}]$ là tích có hướng của hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.
- $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}$ là tích vô hướng của vector kết quả trên với vector $\vec{AD}$.
- Giá trị tuyệt đối đảm bảo thể tích là số dương.

Ví dụ 1: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm A(1, 0, 2), B(2, 1, 0), C(0, 3, 1), D(-1, 2, 2). Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

Giải:

1. Tính tọa độ các vector xuất phát từ đỉnh A:

- $\vec{AB} = (2-1, 1-0, 0-2) = (1, 1, -2)$
- $\vec{AC} = (0-1, 3-0, 1-2) = (-1, 3, -1)$
- $\vec{AD} = (-1-1, 2-0, 2-2) = (-2, 2, 0)$

2. Tính tích có hướng $[\vec{AB}, \vec{AC}]$:

- $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3, (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) = (5, 3, 4)$

3. Tính tích hỗn tạp:

- $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = -10 + 6 + 0 = -4$

4. Áp dụng công thức thể tích:

- $V_{ABCD} = (1/6) |-4| = 4/6 = 2/3$ (đơn vị thể tích).

Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính thể tích khối tứ diện A'ABD.

Giải:

1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với $O \equiv A(0,0,0)$, tia $Ox \equiv AD$, tia $Oy \equiv AB$, tia $Oz \equiv AA'$.

2. Xác định tọa độ các đỉnh:

- $A(0, 0, 0)$
- $B(0, a, 0)$
- $D(a, 0, 0)$
- $A'(0, 0, a)$

3. Tính tọa độ các vector xuất phát từ đỉnh A:

- $\vec{AB} = (0, a, 0)$
- $\vec{AD} = (a, 0, 0)$

- $\vec{AA'} = (0, 0, a)$

4. Thể tích tứ diện A'ABD cũng chính là thể tích tứ diện AA'BD.

- $V_{AA'BD} = (1/6) |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- $[\vec{AB}, \vec{AD}] = (a*0 - 0*0, 0*a - 0*a, 0*0 - a*a) = (0, 0, -a^2)$
- $[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} = 0*0 + 0*0 + (-a^2)*a = -a^3$
- $V_{A'ABD} = (1/6) |-a^3| = a^3/6$ (đơn vị thể tích).

b. Thể tích khối chóp

Đối với khối chóp $S.A_1A_2...A_n$, ta có thể chia khối chóp thành các khối tứ diện nhỏ hoặc sử dụng công thức $V = (1/3) * B * h$.

- **Công thức:** $V = (1/3) \cdot S_{\text{đáy}} \cdot h$

- **Giải thích:**

- **$h = d(S, (P))$:** Chiều cao h là khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy (P) .
- **$S_{\text{đáy}}$:** Diện tích mặt đáy. Ví dụ, với đáy là tam giác ABC, $S_{\Delta ABC} = (1/2) |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$. Với đáy là hình bình hành ABCD, $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Giải:

1. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với $O \equiv B(0,0,0)$, tia $Ox \equiv BA$, tia $Oy \equiv BC$. Vì $SA \perp (ABC)$ và A, B, C cùng mặt phẳng, ta sẽ đặt A, B, C trong mặt phẳng Oxy và sau đó xác định S. Tuy nhiên, cách chọn tối ưu hơn là gốc tại chân đường cao. Chọn hệ trục với $A(0,0,0)$, $AB \equiv Oy$, AD (kẻ thêm) $\equiv Ox$, $AS \equiv Oz$. Nhưng để đơn giản, ta chọn như sau: Gốc B(0,0,0).
2. Chọn hệ trục Oxyz với $B(0,0,0)$, tia $BA \equiv Ox$, tia $BC \equiv Oy$. Trục Bz đi qua B và vuông góc với (ABC).
3. Xác định tọa độ các đỉnh:
 - $B(0, 0, 0)$
 - $A(a, 0, 0)$
 - $C(0, 2a, 0)$
 - Vì $SA \perp (ABC)$ và $A(a, 0, 0)$, nên S có cùng hoành độ và tung độ với A, cao độ là $SA=3a$. Vậy $S(a, 0, 3a)$.
4. Áp dụng công thức thể tích tứ diện S.ABC:
 - $\vec{BA} = (a, 0, 0)$
 - $\vec{BC} = (0, 2a, 0)$
 - $\vec{BS} = (a, 0, 3a)$
 - $V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = (1/6) | [\vec{BA}, \vec{BC}] \cdot \vec{BS} |$
 - $[\vec{BA}, \vec{BC}] = (0, 0, 2a^2)$
 - $[\vec{BA}, \vec{BC}] \cdot \vec{BS} = 0*a + 0*0 + 2a^2*3a = 6a^3$
 - $V_{S.ABC} = (1/6) |6a^3| = a^3$ (đơn vị thể tích).

c. Thể tích khối hộp và khối lăng trụ

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ được xác định bởi 3 vector chung đỉnh $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA'}$.

- **Công thức khối hộp:** $V_{\text{hộp}} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- **Công thức khối lăng trụ tam giác:** Thể tích khối lăng trụ tam giác bằng một nửa thể tích khối hộp tương ứng. $V_{ABC.A'B'C'} = (1/2) |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'}|$. Cách tính này chỉ đúng khi đáy là tam giác và ta tạo ra một hình hộp từ nó. Cách tổng quát hơn: $V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = (1/2)|[\vec{AB}, \vec{AC}]| \cdot d(A', (ABC))$.

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $D(1, 2, 1)$ và $A'(1, 1, 2)$. Tính thể tích khối hộp.

Giải:

1. Tính tọa độ các vector cạnh xuất phát từ đỉnh A:
 - $\vec{AB} = (1, 0, 0)$
 - $\vec{AD} = (0, 1, 0)$
 - $\vec{AA'} = (0, 0, 1)$
2. Tính tích có hướng $[\vec{AB}, \vec{AD}]$:
 - $[\vec{AB}, \vec{AD}] = (0*0 - 0*1, 0*0 - 1*1, 1*1 - 0*0) = (0, -1, 1)$
3. Tính tích hỗn tạp:
 - $[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} = 0*0 + (-1)*0 + 1*1 = 1$

4. Áp dụng công thức thể tích khối hộp:

- $V_{\text{hộp}} = |1| = 1$ (đơn vị thể tích).

3. Lưu ý khi sử dụng phương pháp tọa độ hóa

- **Ưu điểm:** Phương pháp này có quy trình rõ ràng, giúp giải quyết được nhiều bài toán khó mà phương pháp hình học thuần túy tỏ ra phức tạp, đặc biệt là các bài toán liên quan đến góc và khoảng cách phức tạp.
- **Nhược điểm:** Việc tính toán tọa độ và áp dụng công thức có thể dài và dễ nhầm lẫn nếu không cẩn thận. Với những bài toán đơn giản, hình vẽ đẹp, việc dùng hình học thuần túy có thể nhanh hơn.
- **Mẹo:** Luôn kiểm tra lại tọa độ các điểm sau khi xác định. Một sai sót nhỏ ở bước này sẽ dẫn đến kết quả sai. Hãy cố gắng chọn hệ trục sao cho tọa độ các điểm có càng nhiều số 0 càng tốt để đơn giản hóa việc tính toán.