

# Vị trí tương đối của hai đường tròn và ứng dụng trong bánh răng

Trong hình học, việc xét vị trí tương đối của hai đường tròn là một phần kiến thức quan trọng. Trong thực tế, kiến thức này có ứng dụng mật thiết trong kỹ thuật, đặc biệt là trong thiết kế các bộ truyền động bánh răng. Bài học này sẽ giúp chúng ta tổng hợp lại lý thuyết và thấy được sự kết nối thú vị đó.

## Phần 1: Lý thuyết về vị trí tương đối của hai đường tròn

Xét hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$ . Gọi  $OO'$  là đoạn nối tâm của hai đường tròn đó. Vị trí tương đối của chúng phụ thuộc vào mối quan hệ giữa độ dài đoạn nối tâm  $OO'$  và các bán kính  $R, r$ .

### 1. Hai đường tròn cắt nhau

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn có 2 điểm chung. Hai điểm chung đó được gọi là hai giao điểm. Dây chung là đoạn thẳng nối 2 giao điểm.
- **Hệ thức:**  $|R - r| < OO' < R + r$
- **Giải thích:** Độ dài đoạn nối tâm lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng hai bán kính. Đây là điều kiện để hai đường tròn có thể cắt nhau tại hai điểm phân biệt, tạo thành một tam giác có 3 đỉnh là  $O, O'$ , và một giao điểm.
- **Ví dụ 1:** Cho đường tròn  $(O; 5\text{cm})$  và  $(O'; 3\text{cm})$ . Nếu đoạn nối tâm  $OO' = 6\text{cm}$ , ta có:

- $R + r = 5 + 3 = 8\text{cm}$
  - $|R - r| = |5 - 3| = 2\text{cm}$
  - Vì  $2 < 8$ , tức là  $|R - r| < R + r$ , nên hai đường tròn này cắt nhau.
- **Ví dụ 2:** Cho  $(A; 10)$  và  $(B; 8)$  có đoạn nối tâm  $AB = 15$ . Vì  $|10 - 8| = 2$  và  $10 + 8 = 18$ , mà  $2 < 15 < 18$  nên hai đường tròn này cắt nhau.

## 2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn có 1 điểm chung duy nhất. Điểm chung đó được gọi là tiếp điểm.
- **Tính chất:** Tiếp điểm nằm trên đường thẳng nối hai tâm.

### a. Tiếp xúc ngoài

- **Hệ thức:**  $OO' = R + r$
- **Giải thích:** Đoạn nối tâm có độ dài đúng bằng tổng hai bán kính. Hai đường tròn nằm về hai phía của tiếp tuyến chung tại tiếp điểm.
- **Ví dụ:** Cho  $(O; 6\text{cm})$  và  $(O'; 4\text{cm})$ . Nếu  $OO' = 10\text{cm}$ , ta có  $R + r = 6 + 4 = 10\text{cm}$ . Vì  $OO' = R + r$  nên hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

### b. Tiếp xúc trong

- **Hệ thức:**  $OO' = |R - r|$  (Giả sử  $R > r$ )
- **Giải thích:** Đoạn nối tâm có độ dài đúng bằng hiệu hai bán kính. Đường tròn nhỏ nằm bên trong đường tròn lớn.
- **Ví dụ:** Cho  $(O; 7\text{cm})$  và  $(O'; 3\text{cm})$ . Nếu  $OO' = 4\text{cm}$ , ta có  $R - r = 7 - 3 = 4\text{cm}$ . Vì  $OO' = R - r$  nên  $(O')$  tiếp xúc trong với  $(O)$ .

### 3. Hai đường tròn không giao nhau

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn không có điểm chung nào.

#### a. Hai đường tròn ở ngoài nhau

- **Hệ thức:**  $OO' > R + r$
- **Giải thích:** Đoạn nối tâm lớn hơn tổng hai bán kính, hai đường tròn hoàn toàn tách rời nhau.
- **Ví dụ:** Cho  $(O; 5\text{cm})$  và  $(O'; 3\text{cm})$ . Nếu  $OO' = 9\text{cm}$ , ta có  $R + r = 5 + 3 = 8\text{cm}$ . Vì  $9 > 8$  ( $OO' > R + r$ ) nên hai đường tròn này ở ngoài nhau.

#### b. Hai đường tròn đựng nhau

- **Hệ thức:**  $OO' < R - r$  (Giả sử  $R > r$ )
- **Giải thích:** Đường tròn nhỏ nằm hoàn toàn bên trong đường tròn lớn và không tiếp xúc.
- **Ví dụ:** Cho  $(O; 8\text{cm})$  và  $(O'; 2\text{cm})$ . Nếu  $OO' = 3\text{cm}$ , ta có  $R - r = 8 - 2 = 6\text{cm}$ . Vì  $3 < 6$  ( $OO' < R - r$ ) nên đường tròn  $(O')$  bị đựng trong đường tròn  $(O)$ .
- **Trường hợp đặc biệt:** Khi  $OO' = 0$ , hai đường tròn có cùng tâm, gọi là hai đường tròn đồng tâm.

## Phần 2: Bảng tổng kết

| Vị trí tương đối        | Số điểm chung | Hệ thức giữa $OO'$ , $R$ , $r$           |
|-------------------------|---------------|------------------------------------------|
| Hai đường tròn cắt nhau | 2             | $ R - r  < OO' < R + r$                  |
| Tiếp xúc ngoài          | 1             | $OO' = R + r$                            |
| Tiếp xúc trong          | 1             | $OO' =  R - r  \text{ (} R > r \text{)}$ |
| Ở ngoài nhau            | 0             | $OO' > R + r$                            |
| Đụng nhau               | 0             | $OO' =  R - r  \text{ (} R > r \text{)}$ |
| Đồng tâm                | 0             | $OO' = 0$                                |

## Phần 3: Ứng dụng trong cấu tạo bánh răng

Trong cơ khí, bánh răng là các chi tiết có dạng đĩa với các răng cưa dùng để truyền chuyển động quay và momen xoắn giữa các trục. Về mặt hình học, ta có thể coi đường tròn cơ sở (hoặc đường tròn lăn) của bánh răng chính là các đường tròn mà chúng ta xét ở trên.

### 1. Bộ truyền động bánh răng ăn khớp ngoài

- **Tương ứng hình học:** Hai đường tròn **tiếp xúc ngoài**.
- **Nguyên lý:** Hai bánh răng có các răng ăn khớp với nhau ở phía ngoài. Tâm của hai bánh răng (tương ứng với  $O$  và  $O'$ ) được cố định. Khoảng cách giữa hai tâm trục chính là đoạn nối tâm  $OO'$ .

- **Hệ thức:Khoảng cách trục ( $OO'$ ) =  $R + r$** , trong đó  $R$  và  $r$  là bán kính của đường tròn cơ sở của hai bánh răng.
- **Đặc điểm chuyển động:** Hai bánh răng quay ngược chiều nhau. Khi bánh răng chủ động quay theo chiều kim đồng hồ, bánh răng bị động sẽ quay ngược chiều kim đồng hồ và ngược lại.
- **Ví dụ thực tế:** Hộp số xe máy, đồng hồ cơ, các cơ cấu trong máy khoan...

## 2. Bộ truyền động bánh răng ăn khớp trong

- **Tương ứng hình học:** Hai đường tròn **tiếp xúc trong**.
- **Nguyên lý:** Bánh răng nhỏ (bánh răng hành tinh) ăn khớp với các răng được cắt ở mặt trong của một bánh răng lớn hơn (bánh răng vành ngoài).
- **Hệ thức:Khoảng cách trục ( $OO'$ ) =  $R - r$** , trong đó  $R$  là bán kính bánh răng lớn và  $r$  là bán kính bánh răng nhỏ.
- **Đặc điểm chuyển động:** Hai bánh răng quay cùng chiều nhau.
- **Ví dụ thực tế:** Hộp số tự động của ô tô (bộ truyền hành tinh), động cơ máy bay, một số loại bơm thủy lực.

## 3. Tại sao các vị trí khác không được ứng dụng?

- **Cắt nhau:** Nếu hai bánh răng cắt nhau, các răng sẽ bị kẹt, gãy và không thể truyền động liên tục.
- **Không giao nhau (ở ngoài hoặc đụng nhau):** Nếu hai bánh răng không giao nhau, các răng không thể ăn khớp với nhau, do đó không thể truyền chuyển động.

## Phần 4: Bài tập vận dụng

1. **Bài tập 1:** Cho hai đường tròn ( $O$ ;  $8\text{cm}$ ) và ( $O'$ ;  $6\text{cm}$ ). Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn nếu biết khoảng cách hai tâm là: a)  $OO' = 14\text{cm}$ , b)  $OO' = 10\text{cm}$ , c)  $OO' = 2\text{cm}$ , d)  $OO' = 1\text{cm}$ .

### Lời giải:

Ta có  $R = 8\text{cm}$ ,  $r = 6\text{cm}$ . Suy ra  $R + r = 14\text{cm}$  và  $R - r = 2\text{cm}$ .

- a) Vì  $OO' = 14\text{cm} = R + r$ , hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
- b) Vì  $2\text{cm} < OO' < 14\text{cm}$  (tức là  $R - r < OO' < R + r$ ), hai đường tròn cắt nhau.
- c) Vì  $OO' = 2\text{cm} = R - r$ , hai đường tròn tiếp xúc trong.
- d) Vì  $OO' = 1\text{cm} < R - r$ , hai đường tròn đựng nhau.

2. **Bài tập 2:** Hai bánh răng của một hộp số ăn khớp ngoài với nhau. Khoảng cách giữa hai trục quay là  $150\text{mm}$ . Bánh răng lớn có bán kính đường tròn cơ sở gấp đôi bánh răng nhỏ. Tính bán kính mỗi bánh răng.

### Lời giải:

Đây là trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài. Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính bánh răng lớn và nhỏ.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình:

- Khoảng cách trục:  $R + r = 150$  (1)
- Tỷ lệ bán kính:  $R = 2r$  (2)

Thay (2) vào (1), ta được:  $2r + r = 150 \Rightarrow 3r = 150 \Rightarrow r = 50\text{mm}$ .

Suy ra  $R = 2 * 50 = 100\text{mm}$ .

Vậy, bánh răng lớn có bán kính  $100\text{mm}$ , bánh răng nhỏ có bán kính  $50\text{mm}$ .