

Tổng hợp kiến thức về Bất đẳng thức và Phương pháp biến đổi tương đương

Bất đẳng thức là một trong những mảng kiến thức quan trọng và tương đối khó trong chương trình Toán THPT. Nền tảng vững chắc về các tính chất và phương pháp chứng minh cơ bản, đặc biệt là phương pháp biến đổi tương đương, là chìa khóa để giải quyết các bài toán phức tạp hơn. Tài liệu này sẽ hệ thống lại toàn bộ kiến thức cốt lõi đó.

I. Tổng quan về Bất đẳng thức

1. Định nghĩa

Bất đẳng thức là mệnh đề có một trong các dạng: $A > B$, $A < B$, $A \geq B$, $A \leq B$, trong đó A và B là các biểu thức chứa số hoặc biến.

- A được gọi là vế trái, B được gọi là vế phải của bất đẳng thức.
- Nếu bất đẳng thức không chứa biến, ta gọi là bất đẳng thức số (ví dụ: $5 > 3$).
- Nếu bất đẳng thức chứa biến, ta gọi là bất đẳng thức chứa biến hay bất phương trình (ví dụ: $2x + 1 > 5$).

2. Bất đẳng thức hệ quả và Bất đẳng thức tương đương

- **Bất đẳng thức hệ quả:** Nếu mệnh đề " $A > B$ " suy ra mệnh đề " $C > D$ " là mệnh đề đúng, thì ta nói bất đẳng thức $C > D$ là hệ quả của bất đẳng thức $A > B$. Kí hiệu: $A > B \Rightarrow C > D$.

- **Bất đẳng thức tương đương:** Nếu bất đẳng thức $A > B$ là hệ quả của $C > D$ và ngược lại, ta nói hai bất đẳng thức này tương đương với nhau. Kí hiệu: $A > B \Leftrightarrow C > D$.

II. Các tính chất cơ bản của Bất đẳng thức

Đây là những công cụ nền tảng để thực hiện các phép biến đổi tương đương.

1. Tính chất cộng

Công thức: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Giải thích: Cộng (hoặc trừ) cùng một số (hoặc một biểu thức) vào hai vế của một bất đẳng thức và giữ nguyên chiều của nó, ta được một bất đẳng thức mới tương đương.

- **Ví dụ 1:** Ta có $7 > 4$. Cộng 3 vào hai vế, ta được $7 + 3 > 4 + 3 \Leftrightarrow 10 > 7$ (luôn đúng).
- **Ví dụ 2:** Giải bất phương trình $x - 5 > 2$. Ta có $x - 5 > 2 \Leftrightarrow x - 5 + 5 > 2 + 5 \Leftrightarrow x > 7$.

2. Tính chất nhân

Công thức 1 (Nhân với số dương): Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

Giải thích: Nhân (hoặc chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương và giữ nguyên chiều, ta được bất đẳng thức mới tương đương.

- **Ví dụ:** Ta có $8 > 6$. Nhân hai vế với 2 (số dương), ta được $8 * 2 > 6 * 2 \Leftrightarrow 16 > 12$ (luôn đúng).

Công thức 2 (Nhân với số âm): Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

Giải thích: Nhân (hoặc chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều, ta được bất đẳng thức mới tương đương.

- **Ví dụ:** Ta có $8 > 6$. Nhân hai vế với -2 (số âm), ta được $8 * (-2) < 6 * (-2) \Leftrightarrow -16 < -12$ (luôn đúng).

3. Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều

Công thức: $(a > b \text{ và } c > d) \Rightarrow a + c > b + d$

Giải thích: Ta có thể cộng vế theo vế hai bất đẳng thức cùng chiều. Lưu ý đây là phép suy ra ($\Rightarrow$), không phải tương đương ($\Leftrightarrow$).

- **Ví dụ:** Cho $a > 2$ và $b > 5$. Chứng minh $a + b > 7$.

Ta có: $a > 2$ và $b > 5 \Rightarrow a + b > 2 + 5 \Rightarrow a + b > 7$.

4. Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều (vế không âm)

Công thức: $(a > b > 0 \text{ và } c > d > 0) \Rightarrow ac > bd$

Giải thích: Với các vế đều không âm, ta có thể nhân vế theo vế hai bất đẳng thức cùng chiều. Đây cũng là phép suy ra.

- **Ví dụ:** Cho $a > 3$ và $b > 4$. Chứng minh $ab > 12$.

Vì $a > 3 > 0$ và $b > 4 > 0$, ta có: $a * b > 3 * 4 \Rightarrow ab > 12$.

5. Tính chất lũy thừa và khai căn

- **Lũy thừa:** Với n nguyên dương, $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

- **Khai căn:** $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

- **Ví dụ 1:** Ta có $5 > 3$. Suy ra $5^2 > 3^2 \Leftrightarrow 25 > 9$ (luôn đúng).
- **Ví dụ 2:** Ta có $16 > 9$. Suy ra $\sqrt{16} > \sqrt{9} \Leftrightarrow 4 > 3$ (luôn đúng).

III. Phương pháp chứng minh Bất đẳng thức bằng biến đổi tương đương

1. Nguyên tắc chung

Để chứng minh một bất đẳng thức $A \geq B$, ta sử dụng các phép biến đổi tương đương để đưa nó về một bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng (ví dụ: $M^2 \geq 0$, $|M| \geq 0, \dots$). Vì các phép biến đổi là tương đương, nên bất đẳng thức cuối cùng đúng chứng tỏ bất đẳng thức ban đầu cũng đúng.

Sơ đồ chứng minh:

$$A \geq B \Leftrightarrow A_1 \geq B_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow X \geq Y \text{ (Bất đẳng thức } X \geq Y \text{ luôn đúng)}$$

Vậy $A \geq B$ là đúng. Ta cũng cần chỉ ra khi nào dấu "=" xảy ra.

2. Các phép biến đổi tương đương thường dùng

a. Sử dụng định nghĩa: $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

Đây là phương pháp cơ bản nhất. Ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh nó không âm.

Ví dụ 1: Chứng minh với mọi số thực a, b : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số).

Chứng minh:

1. Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

2. $\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (Chuyển vế)

3. $\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng $(a - b)^2 \geq 0$ luôn đúng với mọi số thực a, b . Do các phép biến đổi là tương đương nên bất đẳng thức ban đầu $a^2 + b^2 \geq 2ab$ là đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $(a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 2: Chứng minh với mọi a, b, c : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Chứng minh:

1. Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

2. $\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$ (Nhân 2 vế với 2)

3. $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$ (Chuyển vế)

4. $\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0$

5. $\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $(a - b)^2 \geq 0, (b - c)^2 \geq 0, (c - a)^2 \geq 0$. Vậy bất đẳng thức ban đầu là đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $(a - b)^2 = 0, (b - c)^2 = 0$, và $(c - a)^2 = 0$, tức là $a = b = c$.

b. Bình phương hai vế không âm

Nếu hai vế của bất đẳng thức đều không âm, ta có thể bình phương hai vế mà vẫn giữ được tính tương đương.

Nguyên tắc: Với $A \geq 0, B \geq 0$ thì $A \geq B \Leftrightarrow A^2 \geq B^2$

Ví dụ 1: Cho a, b là các số không âm. Chứng minh: $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$.

Chứng minh:

Vì $a, b \geq 0$ nên cả hai vế của bất đẳng thức đều không âm. Ta có:

1. $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$

2. $\Leftrightarrow ((a+b)/2)^2 \geq (\sqrt{ab})^2$ (Bình phương hai vế)

3. $\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2)/4 \geq ab$

4. $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ (Nhân 2 vế với $4 > 0$)

5. $\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

6. $\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức ban đầu là đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

c. Phân tích thành tích

Phương pháp này biến đổi hiệu $A - B$ thành dạng tích của các nhân tử, sau đó xét dấu của các nhân tử đó.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c : **$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$** .

Chứng minh:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ($a+b \geq 2\sqrt{ab}$) cho các cặp số dương:

- $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

- $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (2)

- $c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (3)

Vì các vế của ba bất đẳng thức trên đều dương, ta nhân vế theo vế:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca})$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \text{ (Vì } a, b, c > 0)$$

Đây là điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi dấu "=" ở cả (1), (2), (3) cùng xảy ra, tức là $a = b$, $b = c$, và $c = a$. Vậy dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

IV. Một số lưu ý khi sử dụng phương pháp biến đổi tương đương

- Thận trọng khi nhân/chia:** Chỉ được nhân/chia hai vế với một biểu thức khi đã biết chắc chắn dấu của nó (dương hay âm). Nếu chưa biết dấu, phải chia trường hợp để xét.
- Thận trọng khi bình phương:** Chỉ được bình phương hai vế của một bất đẳng thức khi cả hai vế đều không âm. Nếu một vế âm, một vế dương thì không được áp dụng.
- Phân biệt $\Rightarrow$ và $\Leftrightarrow$:** Các phép biến đổi như cộng trừ hai vế, nhân chia với số khác 0, bình phương hai vế không âm là các phép biến đổi tương đương ($\Leftrightarrow$). Các phép cộng hoặc nhân vế theo vế các bất đẳng thức cùng chiều là phép biến đổi hệ quả ($\Rightarrow$). Sử dụng sai dấu có thể dẫn đến lập luận không chặt chẽ.
- Tìm điều kiện xảy ra dấu bằng:** Việc tìm điều kiện để dấu "=" xảy ra là một phần quan trọng của bài toán chứng minh bất đẳng thức, giúp tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức.