

Tổng hợp kiến thức: Phương pháp tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và trục tung

Trong chương trình Giải tích lớp 12, bên cạnh phương pháp tính diện tích hình phẳng theo trục hoành (Ox) quen thuộc, việc nắm vững cách tính diện tích theo trục tung (Oy) là vô cùng quan trọng. Phương pháp này đặc biệt hữu ích và giúp đơn giản hóa bài toán trong nhiều trường hợp. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức liên quan.

I. Nhắc lại kiến thức cơ bản: Tính diện tích theo trục hoành (Ox)

Trước khi đi vào phương pháp chính, chúng ta cùng nhắc lại công thức tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành (Ox), và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Tương tự, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

Trong phương pháp này, chúng ta "chia" hình phẳng thành các hình chữ nhật rất nhỏ có chiều rộng là dx và chiều cao là $|f(x)|$ rồi tính tổng (tích phân).

II. Phương pháp tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị và trục tung (Oy)

Tư tưởng của phương pháp này là thay vì biểu diễn y theo x , chúng ta sẽ biểu diễn **x theo y** và lấy tích phân theo biến y . Thay vì các "lát cắt" dọc, chúng ta sẽ dùng các "lát cắt" ngang.

1. Dạng 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $x = g(y)$, trục tung ($x=0$), và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$

Công thức

Diện tích hình phẳng (H) được xác định bởi:

- Đồ thị hàm số **$x = g(y)$**
- Trục tung **Oy** (có phương trình $x = 0$)
- Hai đường thẳng **$y = c$** và **$y = d$** (với $c < d$)

được tính bằng công thức:

$$S = \int_c^d |g(y)| dy$$

Giải thích

- **$x = g(y)$** : Đây là điều kiện tiên quyết. Hàm số phải được biểu diễn dưới dạng x là một hàm của y .
- **c, d** : Là các cận tích phân, tương ứng là tung độ của hai đường biên trên và dưới của hình phẳng.
- **dy** : Cho biết chúng ta đang lấy tích phân theo biến y .

- **$|g(y)|$:** Tượng trưng cho "chiều rộng" của lát cắt ngang tại một tung độ y . Giá trị tuyệt đối đảm bảo diện tích luôn là số không âm. Nếu đồ thị nằm hoàn toàn bên phải trục Oy ($x > 0$) trên đoạn $[c, d]$, ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Các bước giải chi tiết

1. **Chuyển đổi hàm số:** Nếu đề bài cho hàm $y = f(x)$, ta phải thực hiện phép biến đổi đại số để rút x theo y , đưa về dạng $x = g(y)$.
2. **Xác định cận tích phân:** Tìm các cận c và d . Các cận này có thể được đề bài cho sẵn ($y = c, y = d$) hoặc là tung độ giao điểm của đồ thị $x = g(y)$ với trục tung (giải $g(y) = 0$).
3. **Phá dấu giá trị tuyệt đối:** Xét dấu của biểu thức $g(y)$ trên đoạn $[c, d]$.
 - Nếu $g(y) \geq 0$ với mọi $y \in [c, d]$, thì $S = \int_c^d g(y) dy$.
 - Nếu $g(y) \leq 0$ với mọi $y \in [c, d]$, thì $S = \int_c^d -g(y) dy$.
 - Nếu $g(y)$ đổi dấu tại $y_0 \in (c, d)$, ta phải tách tích phân: $S = \int_c^{y_0} |g(y)| dy + \int_{y_0}^d |g(y)| dy$.
4. **Tính tích phân:** Áp dụng các quy tắc tính tích phân đã học để tìm kết quả.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = 4 - y^2$ và trục tung.

- **Bước 1:** Hàm số đã có dạng $x = g(y) = 4 - y^2$.

- **Bước 2:** Tìm giao điểm với trục tung ($x=0$): $4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ hoặc $y = -2$.
Vậy cận tích phân là $c = -2$, $d = 2$.
- **Bước 3:** Xét dấu $g(y) = 4 - y^2$ trên đoạn $[-2, 2]$. Chọn $y = 0 \in (-2, 2)$, ta có $g(0) = 4 > 0$. Vậy $g(y) \geq 0$ trên $[-2, 2]$. Do đó, $|4 - y^2| = 4 - y^2$.
- **Bước 4:** Tính tích phân: $S = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = [4y - y^3/3]_{-2}^2 = (4 \cdot 2 - 2^3/3) - (4 \cdot (-2) - (-2)^3/3) = (8 - 8/3) - (-8 + 8/3) = 16/3 - (-16/3) = 32/3$ (đvdt).

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \ln(x)$, trục tung và hai đường thẳng $y = 0$, $y = 1$.

- **Bước 1:** Chuyển đổi hàm số: Từ $y = \ln(x)$, ta có $x = e^y$. Vậy $g(y) = e^y$.
- **Bước 2:** Cận tích phân được cho sẵn là $c = 0$, $d = 1$.
- **Bước 3:** Xét dấu $g(y) = e^y$ trên đoạn $[0, 1]$. Vì $e > 1$ nên $e^y > 0$ với mọi y . Do đó $|e^y| = e^y$.
- **Bước 4:** Tính tích phân: $S = \int_0^1 e^y dy = [e^y]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$ (đvdt).

2. Dạng 2: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$

Công thức

Diện tích hình phẳng (H) được xác định bởi:

- Đồ thị hàm số $x = g_1(y)$
- Đồ thị hàm số $x = g_2(y)$
- Hai đường thẳng $y = c$ và $y = d$ (với $c < d$)

được tính bằng công thức:

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy$$

Giải thích

Tương tự như tính theo trục Ox, biểu thức $|g_1(y) - g_2(y)|$ chính là khoảng cách theo phương ngang giữa hai đồ thị tại một tung độ y cho trước. Tích phân này "cộng dồn" tất cả các khoảng cách đó từ $y = c$ đến $y = d$.

Các bước giải chi tiết

1. **Chuyển đổi hàm số:** Đảm bảo cả hai hàm số đều có dạng $x = g(y)$.
2. **Tìm cận tích phân:** Nếu đề bài không cho sẵn, ta giải phương trình hoành độ giao điểm $g_1(y) = g_2(y)$ để tìm các nghiệm $y_1, y_2, \dots$. Các nghiệm này chính là các cận tích phân.
3. **Phá dấu giá trị tuyệt đối:** Xét dấu của hiệu $g_1(y) - g_2(y)$ trên đoạn $[c, d]$. Cách đơn giản là chọn một giá trị y_0 bất kỳ trong khoảng (c, d) và so sánh $g_1(y_0)$ và $g_2(y_0)$. Nếu $g_1(y_0) > g_2(y_0)$ thì $|g_1(y) - g_2(y)| = g_1(y) - g_2(y)$ trên cả đoạn $[c, d]$ (nếu không có giao điểm nào khác ở giữa).
4. **Tính tích phân:** Áp dụng công thức và tính toán.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $x = y^2$ và $x = y + 2$.

- **Bước 1:** Các hàm số đã có dạng chuẩn: $g_1(y) = y^2$ và $g_2(y) = y + 2$.
- **Bước 2:** Tìm cận bằng cách giải phương trình giao điểm: $y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y + 1) = 0$. Ta có hai nghiệm $y = -1$ và $y = 2$. Vậy $c = -1, d = 2$.

- **Bước 3:** Xét dấu của hiệu $(y + 2) - y^2$ trên đoạn $[-1, 2]$. Chọn $y = 0 \in (-1, 2)$, ta có $(0 + 2) - 0^2 = 2 > 0$. Do đó, trên $[-1, 2]$, ta có $y + 2 \geq y^2$. Vậy $|(y + 2) - y^2| = y + 2 - y^2$.
- **Bước 4:** Tính tích phân: $S = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = [y^2/2 + 2y - y^3/3]_{-1}^2 = (2^2/2 + 2*2 - 2^3/3) - ((-1)^2/2 + 2*(-1) - (-1)^3/3) = (2 + 4 - 8/3) - (1/2 - 2 + 1/3) = (10/3) - (-7/6) = 27/6 = 9/2$ (đvdt).

III. Bảng so sánh phương pháp tính diện tích theo Ox và Oy

Việc lựa chọn phương pháp nào phụ thuộc vào hình dạng của miền và sự phức tạp của hàm số. Đôi khi một phương pháp sẽ đơn giản hơn rất nhiều so với phương pháp kia.

Tiêu chí	Tính theo trục hoành (Ox)	Tính theo trục tung (Oy)
Biểu diễn hàm số	$y = f(x)$ (y là hàm của x)	$x = g(y)$ (x là hàm của y)
Cận tích phân	Là các hoành độ $x = a, x = b$	Là các tung độ $y = c, y = d$
Công thức (1 đồ thị)	$S = \int_a^b f(x) dx$	$S = \int_c^d g(y) dy$
Công thức (2 đồ thị)	$S = \int_a^b f_1(x) - f_2(x) dx$	$S = \int_c^d g_1(y) - g_2(y) dy$
Hướng "lát cắt"	Các lát cắt dọc, có chiều rộng dx	Các lát cắt ngang, có chiều rộng dy

IV. Một số lưu ý quan trọng và lỗi sai thường gặp

- **Xác định đúng hàm và biến:** Khi tính theo Oy, mọi thứ phải được đưa về biến y: hàm số $x = g(y)$, cận $y=c, y=d$, và vi phân dy . Một lỗi phổ biến là viết $x=g(y)$ nhưng lại lấy tích phân theo dx .
- **Vẽ đồ thị để hình dung:** Nếu có thể, hãy phác thảo đồ thị của các hàm số. Việc này giúp xác định chính xác cận tích phân và đường nào nằm "bên phải" đường nào (tương ứng với hàm nào lớn hơn), giúp việc phá dấu giá trị tuyệt đối trở nên trực quan.

- **Cẩn thận khi rút x theo y:** Với các hàm như $y = x^2$, khi rút x theo y ta được $x = \pm\sqrt{y}$. Cần xác định đúng nhánh của đồ thị ($x = \sqrt{y}$ hay $x = -\sqrt{y}$) mà bài toán đề cập.
- **Đừng quên giá trị tuyệt đối:** Luôn bắt đầu với công thức có dấu giá trị tuyệt đối. Chỉ bỏ nó đi sau khi đã xét dấu cẩn thận. Bỏ qua bước này có thể dẫn đến kết quả diện tích bị âm hoặc sai lệch.