

TỔNG HỢP PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN MIN-MAX CỦA MODUN SỐ PHỨC

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của modun số phức là một dạng toán vận dụng cao thường xuất hiện trong các đề thi THPT Quốc Gia. Nắm vững các phương pháp giải sẽ giúp học sinh tự tin chinh phục dạng bài này.

I. Kiến thức nền tảng cần nhớ

1. Định nghĩa và tính chất của Modun

- Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), modun của z , ký hiệu là $|z|$, được định nghĩa bởi công thức: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Ý nghĩa hình học:** Trong mặt phẳng phức Oxy, mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Khi đó, modun của z chính là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M : $|z| = OM$.
- Modun của hiệu hai số phức $|z_1 - z_2|$ chính là khoảng cách giữa hai điểm M_1 và M_2 biểu diễn cho hai số phức z_1 và z_2 . $|z_1 - z_2| = M_1M_2$.

2. Các tính chất quan trọng

- $|z| \geq 0$ với mọi số phức z , $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z| = |\bar{z}|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

- $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ (với $z_2 \neq 0$).
- **Bất đẳng thức tam giác:** $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với k là một số thực.

II. Các phương pháp giải bài toán Min-Max Modun

Phương pháp 1: Sử dụng hình học giải tích

Đây là phương pháp mạnh và trực quan nhất. Ý tưởng là chuyển bài toán từ ngôn ngữ số phức sang ngôn ngữ hình học tọa độ Oxy.

1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.
2. Từ điều kiện của bài toán, tìm tập hợp các điểm M . Tập hợp này thường là đường thẳng, đường tròn, elip,...
3. Yêu cầu của bài toán (tìm Min-Max của $|z - z_0|$) sẽ tương đương với việc tìm Min-Max của khoảng cách AM_0 , trong đó A là một điểm cố định biểu diễn z_0 .

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - (3 + 4i)| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

- **Phân tích:** Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn z . Điều kiện $|z - (3 + 4i)| = 2$ có nghĩa là điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = 2$. Bài toán trở thành tìm GTLN, GTNN của OM .
- **Giải:**
 - Ta có $OI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

- Điểm M di chuyển trên đường tròn (C). Khoảng cách OM lớn nhất và nhỏ nhất khi M nằm trên đường thẳng OI.
- $|z|_{\max} = OM_{\max} = OI + R = 5 + 2 = 7.$
- $|z|_{\min} = OM_{\min} = OI - R = 5 - 2 = 3.$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = |z - 5 + 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 3 - i|$.

- **Phân tích:** Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn z . $A(1; 2)$ biểu diễn số phức $1 + 2i$. $B(5; -2)$ biểu diễn số phức $5 - 2i$. Điều kiện $|z - (1 + 2i)| = |z - (5 - 2i)|$ tương đương $MA = MB$. Vậy M thuộc đường trung trực (d) của đoạn thẳng AB. Bài toán yêu cầu tìm GTNN của $|z - (-3 + i)|$, tức là tìm GTNN của khoảng cách MK, với $K(-3; 1)$.
- **Giải:**
 - Phương trình đường trung trực (d) của AB: đi qua trung điểm $I(3; 0)$ của AB và có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (4; -4) // (1; -1)$. Vậy (d): $1(x - 3) - 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.
 - MK nhỏ nhất khi M là hình chiếu của K lên (d).
 - $|z + 3 - i|_{\min} = MK_{\min} = d(K, d) = |(-3) - 1 - 3| / \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 7/\sqrt{2} = 7\sqrt{2}/2.$

Phương pháp 2: Sử dụng phương pháp đại số (Thế và khảo sát hàm số)

Phương pháp này phù hợp khi mối quan hệ hình học không rõ ràng hoặc khó vẽ.

Ý tưởng là đặt $z = x + yi$, thay vào điều kiện để tìm mối liên hệ giữa x và y , sau đó biểu diễn đại lượng cần tìm Min-Max theo một biến và khảo sát hàm số.

1. Đặt $z = x + yi$.
2. Từ điều kiện bài toán, rút một biến theo biến còn lại (ví dụ: rút y theo x).
3. Thay vào biểu thức P cần tìm Min-Max để được một hàm số một biến (ví dụ: $P = f(x)$).
4. Tìm miền giá trị của biến đó và tiến hành khảo sát hàm số (tính đạo hàm, lập bảng biến thiên) để tìm GTLN, GTNN.

Ví dụ: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm modun nhỏ nhất của z .

• Giải:

- Đặt $z = x + yi$. Ta có: $|(x - 2) + (y - 4)i| = |x + (y - 2)i|$
- $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = x^2 + (y - 2)^2$
- $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 4y + 4$
- $\Leftrightarrow -4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$.
- Ta cần tìm GTNN của $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta xét $P = |z|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16$.
- Đây là một parabol có đỉnh tại $x = -b/(2a) = -(-8)/(2*2) = 2$.
- Khi $x = 2, y = 4 - 2 = 2$.

- $P_{\min} = 2(2)^2 - 8(2) + 16 = 8.$
- Vậy $|z|_{\min} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ khi $z = 2 + 2i.$

Phương pháp 3: Sử dụng bất đẳng thức Modun

Phương pháp này hiệu quả cho các bài toán mà biểu thức và điều kiện có dạng tổng/hiệu các modun.

- Sử dụng bất đẳng thức tam giác: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$
- Dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với k là số thực (hai vector biểu diễn cùng phương).

Ví dụ: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 2i| = 1.$ Tìm GTLN, GTNN của $P = |z|.$

• Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác, ta có: $||z| - |2 - 2i|| \leq |z - (2 - 2i)|.$
- $|2 - 2i| = \sqrt{(2^2 + (-2)^2)} = 2\sqrt{2}.$
- $||z| - 2\sqrt{2}| \leq 1.$
- $\Leftrightarrow -1 \leq |z| - 2\sqrt{2} \leq 1.$
- $\Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq 2\sqrt{2} + 1.$
- Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{2} + 1$ và $P_{\min} = 2\sqrt{2} - 1.$

Phương pháp 4: Lượng giác hóa

Phương pháp này đặc biệt hữu ích khi tập hợp điểm M biểu diễn z là một đường tròn.

- Nếu M thuộc đường tròn tâm O, bán kính R, tức $|z| = R$, ta đặt $z = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.
- Nếu M thuộc đường tròn tâm I(a, b), bán kính R, tức $|z - (a+bi)| = R$, ta đặt $z - (a+bi) = R(\cos\varphi + i \sin\varphi) \Rightarrow z = a + R\cos\varphi + (b + R\sin\varphi)i$.
- Sau đó thay vào biểu thức cần tìm Min-Max và khảo sát hàm lượng giác theo biến φ .

Ví dụ: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm GTLN của $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

• **Giải:**

- Vì $|z| = 1$, ta đặt $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$.
- $|1 + z| = |(1 + \cos\varphi) + i \sin\varphi| = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi} = 2|\cos(\varphi/2)|$.
- $|1 - z| = |(1 - \cos\varphi) - i \sin\varphi| = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = 2|\sin(\varphi/2)|$.
- Vì $\varphi \in [0, 2\pi]$, ta có thể chọn $\varphi/2 \in [0, \pi]$ nên $\cos(\varphi/2)$ và $\sin(\varphi/2)$ có thể âm hoặc dương, nhưng để đơn giản, ta xét trên một khoảng đối xứng. $P = 2|\cos(\varphi/2)| + 6|\sin(\varphi/2)|$.
- Áp dụng BĐT Bunyakovsky: $(2|\cos(\varphi/2)| + 6|\sin(\varphi/2)|)^2 \leq (2^2 + 6^2)(\cos^2(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2)) = 40 * 1 = 40$.
- Suy ra $P \leq \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
- Vậy $P_{\max} = 2\sqrt{10}$.

III. Bảng tổng kết các phương pháp

Phương pháp	Dấu hiệu nhận biết	Ưu điểm	Nhược điểm
Hình học giải tích	Điều kiện cho z quy về phương trình đường thẳng, đường tròn, elip quen thuộc.	Trực quan, dễ hình dung, giải nhanh các bài toán quen thuộc.	Khó áp dụng nếu quỹ tích phức tạp, đòi hỏi tư duy hình học tốt.
Đại số (Khảo sát hàm số)	Khi có thể rút được một biến (x hoặc y) theo biến còn lại một cách tường minh.	Tổng quát, áp dụng được cho nhiều dạng bài.	Tính toán có thể dài dòng, phức tạp, dễ nhầm lẫn.
Bất đẳng thức Modun	Biểu thức và điều kiện có dạng tổng/hiệu của các modun.	Lời giải rất ngắn gọn, thanh lịch.	Cần nhận dạng đúng BĐT và điều kiện xảy ra dấu "=". Không phải lúc nào cũng áp dụng được.
Lượng giác hóa	Điều kiện cho z có dạng $ z - z_0 = R$ (quỹ tích là đường tròn).	Đưa bài toán về khảo sát hàm lượng giác, một dạng quen thuộc.	Biến đổi lượng giác có thể phức tạp.