

Chuyên đề: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số và thế

I. Kiến thức cần nhớ

1. Khái niệm hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Trong đó:

- x, y là hai ẩn số.
- a, b, c, a', b', c' là các hệ số đã biết.

Nghiệm của hệ phương trình: Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình nếu nó đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình (1) và (2).

Giải hệ phương trình: Là tìm tất cả các nghiệm (tập nghiệm) của nó.

II. Các phương pháp giải hệ phương trình

1. Phương pháp thế

Phương pháp thế là phương pháp biến đổi hệ phương trình đã cho thành một hệ phương trình mới tương đương, trong đó có một phương trình chỉ chứa một ẩn.

a. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc gồm hai bước:

1. Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia.
2. Lấy kết quả trên thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

b. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

1. **Bước 1:** Từ một trong hai phương trình của hệ, ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia. (Nên chọn phương trình có hệ số của x hoặc y bằng 1 hoặc -1 để việc biểu diễn được dễ dàng hơn).
2. **Bước 2:** Thế biểu thức của ẩn vừa biểu diễn vào phương trình còn lại, ta thu được một phương trình mới chỉ chứa một ẩn.
3. **Bước 3:** Giải phương trình một ẩn vừa tìm được. Từ đó suy ra giá trị của ẩn còn lại và kết luận nghiệm của hệ.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

1. **Bước 1:** Từ phương trình (1), ta rút x theo y: $x = 2 + 3y$.

2. **Bước 2:** Thế biểu thức $x = 2 + 3y$ vào phương trình (2):

$$-2(2 + 3y) + 5y = 1$$

3. **Bước 3:** Giải phương trình một ẩn y vừa tìm được:

$$-4 - 6y + 5y = 1$$

$$-y = 5$$

$$y = -5$$

Thay $y = -5$ vào biểu thức $x = 2 + 3y$, ta được:

$$x = 2 + 3(-5)$$

$$x = 2 - 15$$

$$x = -13$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (-13; -5)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Giải:

1. **Bước 1:** Từ phương trình (1), rút y theo x (vì hệ số của y là 1): $y = 5 - 2x$.

2. **Bước 2:** Thế $y = 5 - 2x$ vào phương trình (2):

$$3x - 2(5 - 2x) = 4$$

3. **Bước 3:** Giải phương trình ẩn x :

$$3x - 10 + 4x = 4$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức $y = 5 - 2x$, ta được:

$$y = 5 - 2(2)$$

$$y = 5 - 4$$

$$\mathbf{y = 1}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 1)$.

2. Phương pháp cộng đại số

Phương pháp cộng đại số là phương pháp biến đổi hệ phương trình đã cho thành một hệ phương trình mới tương đương, trong đó có một phương trình chỉ chứa một ẩn, bằng cách cộng hoặc trừ từng vế hai phương trình của hệ.

a. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc gồm hai bước:

1. Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ đã cho để được một phương trình mới.
2. Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ lại phương trình kia) để được một hệ mới tương đương.

b. Các bước giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

1. **Bước 1:** Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho hệ số của một trong hai ẩn (x hoặc y) trong hai phương trình là hai số đối nhau (ví dụ: 2 và -2) hoặc bằng nhau.
2. **Bước 2:** Áp dụng quy tắc cộng đại số:

- Nếu hệ số của một ẩn đối nhau, ta cộng vế theo vế hai phương trình để triệt tiêu ẩn đó.
- Nếu hệ số của một ẩn bằng nhau, ta trừ vế theo vế hai phương trình để triệt tiêu ẩn đó.

Ta sẽ được một hệ mới, trong đó có một phương trình chỉ còn một ẩn.

3. **Bước 3:** Giải phương trình một ẩn vừa thu được, sau đó thay giá trị tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm ẩn còn lại. Kết luận nghiệm của hệ.

c. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau (hệ số của y đối nhau):

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 6 & (2) \end{cases}$$

Giải:

1. **Bước 1:** Hệ số của y trong hai phương trình là 1 và -1 (đối nhau), không cần nhân thêm.

2. **Bước 2:** Cộng vế theo vế hai phương trình (1) và (2):

$$(2x + y) + (x - y) = 3 + 6$$

$$3x = 9$$

3. **Bước 3:** Giải phương trình mới:

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Thay $x = 3$ vào phương trình (1):

$$2(3) + y = 3$$

$$6 + y = 3$$

$$y = -3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (3; -3)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau (cần nhân một phương trình):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -5 & (2) \end{cases}$$

Giải:

1. **Bước 1:** Để triệt tiêu ẩn x , ta nhân hai vế của phương trình (2) với -3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 9y = 15 \end{cases}$$

2. **Bước 2:** Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ mới:

$$(3x + 2y) + (-3x + 9y) = 7 + 15$$

$$11y = 22$$

3. **Bước 3:** Giải phương trình mới:

$$11y = 22 \Rightarrow y = 2$$

Thay $y = 2$ vào phương trình (2) ban đầu:

$$x - 3(2) = -5$$

$$x - 6 = -5$$

$$x = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 2)$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình sau (cần nhân cả hai phương trình):

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải:

1. **Bước 1:** Để triệt tiêu ẩn y , ta nhân hai vế của phương trình (1) với 3 và phương trình (2) với 4:

$$\begin{cases} 9x + 12y = 54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - 12y = 4 \end{cases}$$

2. **Bước 2:** Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ mới:

$$(9x + 12y) + (20x - 12y) = 54 + 4$$

$$29x = 58$$

3. **Bước 3:** Giải phương trình mới:

$$29x = 58 \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào phương trình (2) ban đầu:

$$5(2) - 3y = 1$$

$$10 - 3y = 1$$

$$-3y = -9$$

$$y = 3$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 3)$.

III. Lựa chọn phương pháp giải và các lưu ý

1. Khi nào nên dùng phương pháp nào?

Tiêu chí	Phương pháp thế	Phương pháp cộng đại số
Khi nào nên dùng?	Khi một trong hai phương trình có hệ số của một ẩn (x hoặc y) là 1 hoặc -1.	Khi hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình bằng nhau, đối nhau, hoặc có thể dễ dàng đưa về bằng nhau/đối nhau.
Ưu điểm	Dễ hiểu, quy trình rõ ràng. Hiệu quả với các hệ phương trình đơn giản.	Giải nhanh các hệ có hệ số phức tạp, hệ số lớn hoặc là phân số. Thường tính toán gọn hơn.

Thực tế, cả hai phương pháp đều có thể giải được mọi hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Việc lựa chọn phương pháp phù hợp sẽ giúp quá trình giải toán nhanh chóng và ít sai sót hơn.

2. Các lưu ý quan trọng khi giải

- **Kiểm tra lại nghiệm:** Sau khi tìm được cặp (x; y), hãy thay giá trị của chúng vào cả hai phương trình của hệ ban đầu để kiểm tra xem có thỏa mãn không. Đây là bước quan trọng để đảm bảo kết quả chính xác.
- **Cẩn thận về dấu:** Khi nhân, chia, chuyển vế, đổi dấu, cần hết sức cẩn thận để tránh sai sót. Đặc biệt là khi trừ vế theo vế trong phương pháp cộng đại số.

- **Trình bày rõ ràng:** Viết các bước giải một cách mạch lạc, ký hiệu các phương trình và các phép biến đổi rõ ràng để dễ theo dõi và kiểm tra.
- **Các trường hợp đặc biệt:** Khi giải, nếu gặp phương trình dạng $0x = m$ (với $m \neq 0$), hệ phương trình vô nghiệm. Nếu gặp phương trình dạng $0x = 0$, hệ phương trình có vô số nghiệm.

VIDOCU.COM