

Chuyên đề: Sử dụng phương pháp tọa độ hóa để tính góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp tọa độ hóa là một công cụ mạnh mẽ trong hình học không gian, giúp chuyển các bài toán hình học phức tạp về dạng đại số, đặc biệt là các bài toán liên quan đến góc và khoảng cách. Chuyên đề này sẽ tập trung vào việc ứng dụng phương pháp tọa độ hóa để giải quyết bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng một cách hệ thống và hiệu quả.

I. Cơ sở lý thuyết

1. Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Góc này luôn có số đo từ 0° đến 90° .

Trong không gian Oxyz, nếu mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến (VTPT) là $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ và mặt phẳng (Q) có VTPT là $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, thì góc φ giữa (P) và (Q) được xác định thông qua góc giữa hai vector pháp tuyến của chúng.

2. Công thức tính góc giữa hai mặt phẳng

Công thức tính góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$\cos(\varphi) = |\cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$$

Trong đó:

- $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ là tích vô hướng của hai vector: $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.
- $|\mathbf{n}_1|$ và $|\mathbf{n}_2|$ là độ dài (mô-đun) của hai vector: $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.
- Dấu giá trị tuyệt đối $|\dots|$ ở tử số đảm bảo rằng $\cos(\varphi) \geq 0$, do đó góc φ luôn là góc nhọn ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$).

II. Các bước tọa độ hóa để tính góc

Để giải bài toán tính góc giữa hai mặt phẳng bằng phương pháp tọa độ hóa, chúng ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp.** Đây là bước quan trọng nhất, quyết định độ phức tạp của bài toán. Nguyên tắc chung là gắn hệ trục vào hình sao cho các trục tọa độ trùng với các đường thẳng có sẵn và vuông góc với nhau trong hình.
 - Chọn gốc tọa độ O thường là một đỉnh của hình, ưu tiên đỉnh có các cạnh đôi một vuông góc.
 - Các trục Ox, Oy, Oz được chọn trùng với các cạnh hoặc đường cao của hình.
 - Cố gắng để càng nhiều đỉnh của hình nằm trên các trục hoặc các mặt phẳng tọa độ càng tốt.
- Bước 2: Xác định tọa độ các đỉnh liên quan.** Dựa vào hệ trục đã chọn và các giả thiết về độ dài, tính toán tọa độ của các đỉnh cần thiết để xác định hai mặt phẳng.
- Bước 3: Tìm vector pháp tuyến của hai mặt phẳng.**

- Nếu một mặt phẳng (P) đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C, ta tìm hai vector chỉ phương không cùng phương như **AB** và **AC**. Khi đó, VTPT của (P) là **$\mathbf{n} = [\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]$** (tích có hướng của hai vector).
- Nếu phương trình mặt phẳng có dạng tổng quát $Ax + By + Cz + D = 0$, thì VTPT là **$\mathbf{n} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$** .

4. **Bước 4: Áp dụng công thức tính góc.** Lắp các VTPT vừa tìm được vào công thức tính cosin của góc và tìm ra kết quả.

III. Ví dụ minh họa chi tiết

Ví dụ 1: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Đề bài: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải:

1. Chọn hệ trục tọa độ:

- Gốc tọa độ tại A(0, 0, 0).
- Trục Ox trùng với AD.
- Trục Oy trùng với AB.
- Trục Oz trùng với AS.
- Do $SA \perp (ABCD)$, $AB \perp AD$ nên hệ trục này là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc.

2. Xác định tọa độ các đỉnh:

- $A(0, 0, 0)$
- $D(a, 0, 0)$ (vì D nằm trên Ox và $AD = a$)
- $B(0, a, 0)$ (vì B nằm trên Oy và $AB = a$)
- $C(a, a, 0)$ (vì $AC = AB + AD$)
- $S(0, 0, a\sqrt{2})$ (vì S nằm trên Oz và $SA = a\sqrt{2}$)

3. Tìm VTPT của hai mặt phẳng:

- **Mặt phẳng (SBC):** Đi qua 3 điểm S, B, C .
 - Ta có vector $\mathbf{SB} = (0, a, -a\sqrt{2})$ và $\mathbf{BC} = (a, 0, 0)$.
 - VTPT của (SBC) là $\mathbf{n}_1 = [\mathbf{SB}, \mathbf{BC}] = (0, -a(-a\sqrt{2}), -a*a) = (0, a^2\sqrt{2}, -a^2)$.
 - Ta có thể chọn một vector cùng phương đơn giản hơn: $\mathbf{n}_1' = (0, \sqrt{2}, -1)$.
- **Mặt phẳng (SCD):** Đi qua 3 điểm S, C, D .
 - Ta có vector $\mathbf{SD} = (a, 0, -a\sqrt{2})$ và $\mathbf{CD} = (0, -a, 0)$.
 - VTPT của (SCD) là $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{SD}, \mathbf{CD}] = (a(-a\sqrt{2}), -(-a\sqrt{2}*(-a)), a(-a)) = (-a^2\sqrt{2}, -a^2\sqrt{2}, -a^2)$.
 - Ta có thể chọn một vector cùng phương đơn giản hơn: $\mathbf{n}_2' = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

4. Áp dụng công thức tính góc:

Gọi φ là góc giữa (SBC) và (SCD).

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{n}_2'|}{(|\mathbf{n}_1'| \cdot |\mathbf{n}_2'|)}$$

- Tích vô hướng: $n_1' \cdot n_2' = 0 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + (-1) \cdot 1 = 0 + 2 - 1 = 1$.
- Độ dài vector: $|n_1'| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 2 + 1} = \sqrt{3}$.
- Độ dài vector: $|n_2'| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 2 + 1} = \sqrt{5}$.
- $\cos(\varphi) = \frac{1}{(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng là $\varphi = \arccos(\frac{\sqrt{15}}{15})$.

Ví dụ 2: Hình lăng trụ đứng

Đề bài: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, và cạnh bên $AA' = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(ACC'A')$.

Lời giải:

1. Chọn hệ trục tọa độ:

- Gốc tọa độ tại $B(0, 0, 0)$.
- Trục Bx trùng với BA .
- Trục By trùng với BC .
- Trục Bz trùng với BB' .

2. Xác định tọa độ các đỉnh:

- $B(0, 0, 0)$
- $A(a, 0, 0)$
- $C(0, a\sqrt{3}, 0)$

- $B'(0, 0, 2a)$
- $A'(a, 0, 2a)$
- $C'(0, a\sqrt{3}, 2a)$

3. Tìm VTPT của hai mặt phẳng:

- **Mặt phẳng (A'BC):** Đi qua 3 điểm A', B, C.
 - Ta có vector $\mathbf{BA}' = (a, 0, 2a)$ và $\mathbf{BC} = (0, a\sqrt{3}, 0)$.
 - VTPT của (A'BC) là $\mathbf{n}_1 = [\mathbf{BA}', \mathbf{BC}] = (-2a^2\sqrt{3}, 0, a^2\sqrt{3})$.
 - Chọn vector cùng phương: $\mathbf{n}_1' = (-2, 0, 1)$.
- **Mặt phẳng (ACC'A'):** Đi qua 3 điểm A, C, C'.
 - Ta có vector $\mathbf{AC} = (-a, a\sqrt{3}, 0)$ và $\mathbf{AA}' = (0, 0, 2a)$.
 - VTPT của (ACC'A') là $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{AC}, \mathbf{AA}'] = (2a^2\sqrt{3}, 2a^2, 0)$.
 - Chọn vector cùng phương: $\mathbf{n}_2' = (\sqrt{3}, 1, 0)$.

4. Áp dụng công thức tính góc:

Gọi φ là góc giữa (A'BC) và (ACC'A').

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{n}_2'|}{(|\mathbf{n}_1'| \cdot |\mathbf{n}_2'|)}$$

- Tích vô hướng: $\mathbf{n}_1' \cdot \mathbf{n}_2' = (-2)(\sqrt{3}) + (0)(1) + (1)(0) = -2\sqrt{3}$.
- Độ dài vector: $|\mathbf{n}_1'| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
- Độ dài vector: $|\mathbf{n}_2'| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.
- $\cos(\varphi) = \frac{|-2\sqrt{3}|}{(\sqrt{5} \cdot 2)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng là $\varphi = \arccos(\sqrt{15}/5)$.

IV. Lưu ý và sai lầm thường gặp

Khi áp dụng phương pháp tọa độ hóa, học sinh cần chú ý các điểm sau để tránh sai sót:

- **Chọn hệ trục tọa độ:** Đây là bước quan trọng nhất. Nếu chọn hệ trục không phù hợp, việc xác định tọa độ các điểm sẽ rất phức tạp và dễ nhầm lẫn. Luôn ưu tiên các trục vuông góc có sẵn của hình (ví dụ: hình hộp chữ nhật, hình chóp có cạnh bên vuông góc đáy).
- **Tính toán tọa độ:** Phải cẩn thận khi tính toán tọa độ các điểm, đặc biệt là các điểm không nằm trên trục. Sử dụng chính xác định lý Pytago, hệ thức lượng trong tam giác vuông, tính chất hình học của đáy...
- **Tính tích có hướng:** Học sinh cần thuộc và áp dụng đúng công thức tính tích có hướng. Một sai sót nhỏ về dấu có thể dẫn đến kết quả sai. Công thức: $[a,b] = (a_y b_z - a_z b_y; a_z b_x - a_x b_z; a_x b_y - a_y b_x)$.
- **Sử dụng giá trị tuyệt đối:** Luôn nhớ lấy giá trị tuyệt đối của tích vô hướng trong công thức tính cosin, vì góc giữa hai mặt phẳng không bao giờ là góc tù.
- **Rút gọn VTPT:** Sau khi tính tích có hướng, VTPT thường có các thành phần tọa độ lớn. Ta có thể rút gọn bằng cách chia các thành phần cho ước chung lớn nhất của chúng để việc tính toán ở bước sau đơn giản hơn.
- **So sánh với phương pháp khác:** Mặc dù tọa độ hóa là phương pháp mạnh, nhưng không phải lúc nào cũng là nhanh nhất. Đối với các bài toán có thể

dựng hình và tính toán trực tiếp dễ dàng, phương pháp hình học thuần túy có thể hiệu quả hơn. Hãy linh hoạt lựa chọn phương pháp phù hợp.

VIDOCU.COM