

Tổng hợp phương pháp tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều đường cong

Việc tính diện tích hình phẳng là một ứng dụng quan trọng của tích phân trong chương trình Toán lớp 12. Trong khi các bài toán giới hạn bởi hai đường cong tương đối đơn giản, các bài toán có từ ba đường cong trở lên đòi hỏi tư duy phân tích và chia nhỏ vấn đề. Bài viết này sẽ tổng hợp đầy đủ các phương pháp để giải quyết dạng toán này.

1. Nguyên tắc cơ bản và kiến thức nền tảng

Trước khi đi vào bài toán phức tạp, hãy cùng nhắc lại công thức tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

- **Công thức tổng quát:** $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- **Nguyên tắc:** Để khử dấu giá trị tuyệt đối, ta xét dấu của hiệu $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x) \geq g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ (tức đồ thị $f(x)$ nằm trên đồ thị $g(x)$), công thức trở thành: $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Đối với bài toán giới hạn bởi nhiều đường cong, nguyên tắc cốt lõi là **chia hình phẳng phức tạp thành nhiều hình phẳng đơn giản hơn** mà mỗi hình chỉ bị giới hạn bởi hai đường cong.

2. Phương pháp tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 3 đường cong

Đây là dạng bài phổ biến nhất trong nhóm bài toán nhiều đường cong. Ta thường sử dụng phương pháp chia miền để tính toán.

Các bước thực hiện

1. **Vẽ đồ thị:** Phác thảo đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ. Bước này giúp hình dung rõ ràng hình phẳng cần tính diện tích và vị trí tương đối của các đường cong.
2. **Tìm giao điểm:** Lập phương trình hoành độ giao điểm của từng cặp đồ thị để xác định tọa độ các giao điểm. Các hoành độ giao điểm này sẽ là các cận tích phân hoặc điểm chia miền.
3. **Chia miền:** Dựa vào các hoành độ giao điểm, chia hình phẳng (H) thành các miền nhỏ ($H_1, H_2, \dots$). Mỗi miền nhỏ này chỉ được giới hạn bởi hai đường cong.
4. **Tính diện tích từng miền:** Áp dụng công thức tích phân cơ bản cho từng miền nhỏ. Trên mỗi miền, xác định rõ đâu là hàm số nằm trên và đâu là hàm số nằm dưới.
5. **Tổng hợp kết quả:** Diện tích của hình phẳng (H) ban đầu bằng tổng diện tích của các miền nhỏ: $S = S_1 + S_2 + \dots$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 2 - x$ và $y = 0$ (trục Ox).

Hướng dẫn giải:

1. Tìm giao điểm:

- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$ (loại vì không tạo thành miền bị chặn với trục Ox).

Ta có các hoành độ giao điểm quan trọng là $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Điểm $x = 1$ là điểm chia miền.

2. Chia miền và tính toán:

Hình phẳng được chia thành 2 miền bởi đường thẳng $x = 1$.

- **Miền 1 (H_1):** Giới hạn bởi $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Diện tích $S_1 = \int_0^1 |x^2 - 0| dx = \int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3$.
- **Miền 2 (H_2):** Giới hạn bởi $y = 2 - x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Diện tích $S_2 = \int_1^2 |(2 - x) - 0| dx = \int_1^2 (2 - x) dx = [2x - x^2/2]_1^2 = (4 - 2) - (2 - 1/2) = 2 - 3/2 = 1/2$.

3. Tổng hợp kết quả:

Tổng diện tích cần tìm là $S = S_1 + S_2 = 1/3 + 1/2 = 5/6$ (đvdt).

Ví dụ 2:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục Ox .

Hướng dẫn giải:

1. Tìm giao điểm:

- $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $\sqrt{x} = x - 2$ (với $x \geq 2$) $\Leftrightarrow x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại vì không thỏa mãn $x \geq 2$) hoặc $x = 4$ (nhận).

Các hoành độ giao điểm quan trọng là $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$. Điểm $x = 2$ là điểm chia miền.

2. Chia miền và tính toán:

- **Miền 1 (H_1):** Trên đoạn $[0, 2]$, hình phẳng chỉ giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ và $y = 0$. Diện tích $S_1 = \int_0^2 \sqrt{x} dx = [2/3 * x^{3/2}]_0^2 = 4\sqrt{2} / 3$.
- **Miền 2 (H_2):** Trên đoạn $[2, 4]$, hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$ (đường trên) và $y = x - 2$ (đường dưới). Diện tích $S_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = [2/3 * x^{3/2} - x^2/2 + 2x]_2^4 = (16/3 - 8 + 8) - (4\sqrt{2} / 3 - 2 + 4) = 16/3 - 4\sqrt{2} / 3 - 2 = 10/3 - 4\sqrt{2} / 3$.

3. Tổng hợp kết quả:

Tổng diện tích cần tìm là $S = S_1 + S_2 = 4\sqrt{2} / 3 + 10/3 - 4\sqrt{2} / 3 = 10/3$ (đvdt).

3. Phương pháp "Lấy diện tích lớn trừ diện tích nhỏ"

Đây là một cách tư duy khác, đôi khi giúp bài toán trở nên đơn giản hơn. Thay vì cộng các miền nhỏ, ta tính diện tích một hình lớn bao trùm rồi trừ đi phần diện tích không cần thiết.

Ví dụ minh họa (Sử dụng lại Ví dụ 2)

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục Ox.

Hướng dẫn giải:

1. **Xác định hình lớn ($S_{\text{lớn}}$):** Ta có thể xem hình cần tính là phần còn lại sau khi lấy hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, trục Ox, $x = 0$, $x = 4$ ($S_{\text{lớn}}$) trừ đi hình tam giác giới hạn bởi $y = x - 2$, trục Ox, $x = 2$, $x = 4$ ($S_{\text{nhỏ}}$).

2. **Tính $S_{\text{lớn}}$:**

$$S_{\text{lớn}} = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} * x^{3/2} \right] \Big|_0^4 = \frac{2}{3} * 4^{3/2} = \frac{2}{3} * 8 = \frac{16}{3}.$$

3. **Tính $S_{\text{nhỏ}}$:**

$S_{\text{nhỏ}}$ là diện tích tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 2 (từ $x=2$ đến $x=4$) và 2 (giá trị của $y=x-2$ tại $x=4$).

Hoặc tính bằng tích phân: $S_{\text{nhỏ}} = \int_2^4 (x - 2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right] \Big|_2^4 = (8 - 8) - (2 - 4) = 2.$

4. **Kết quả:**

Diện tích cần tìm $S = S_{\text{lớn}} - S_{\text{nhỏ}} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$ (đvdt).

Kết quả hoàn toàn trùng khớp với phương pháp chia miền.

4. Trường hợp tổng quát và các lưu ý quan trọng

Trường hợp nhiều hơn 3 đường cong

Nguyên tắc vẫn không thay đổi: tìm tất cả các hoành độ giao điểm, sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần để xác định các khoảng tích phân. Trên mỗi khoảng, xác định đường cong trên cùng và đường cong dưới cùng để tính diện tích miền đó, sau đó cộng tất cả lại.

Các lưu ý quan trọng

- **Phác thảo đồ thị là cực kỳ quan trọng:** Nó giúp bạn xác định đúng cận, đúng miền, và đúng hàm trên/dưới, tránh sai sót không đáng có.
- **Kiểm tra đủ giao điểm:** Bỏ sót giao điểm sẽ dẫn đến việc chia thiếu miền và tính sai diện tích.
- **Tích phân theo biến y :** Trong một số trường hợp, việc biểu diễn các đường cong dưới dạng $x = f(y)$, $x = g(y)$ và tích phân theo biến y sẽ đơn giản hơn. Khi đó, công thức là: $S = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$, với nguyên tắc là "lấy đường bên phải trừ đường bên trái".
- **Sử dụng máy tính cầm tay:** Sau khi đã thiết lập đúng công thức tích phân, hãy dùng máy tính để kiểm tra kết quả, tránh sai sót trong tính toán.

Sai lầm thường gặp

- Xác định sai hàm trên - hàm dưới, dẫn đến kết quả tích phân bị âm (nếu không dùng trị tuyệt đối).

- Áp dụng công thức $S = \int |f(x) - g(x) - h(x)| dx$, đây là công thức sai hoàn toàn. Phải luôn chia miền để mỗi miền chỉ có 2 hàm.
- Lấy nhầm cận tích phân, đặc biệt là khi có nhiều giao điểm.

VIDOCU.COM