

Tổng hợp phương pháp giải toán Cực trị hàm số bằng Bảng biến thiên

Phương pháp lập bảng biến thiên là một công cụ mạnh mẽ và trực quan nhất để xét sự đồng biến, nghịch biến và tìm các điểm cực trị của hàm số. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức và các bước thực hiện để học sinh có thể áp dụng một cách nhanh chóng và chính xác.

1. Kiến thức nền tảng về cực trị hàm số

a. Định nghĩa

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.
- Nếu tồn tại một khoảng $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$, thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0 .
- Nếu tồn tại một khoảng $(x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$, thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .

Lưu ý quan trọng:

- **Điểm cực đại** và **điểm cực tiểu** được gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (hoặc cực tiểu)** của hàm số.
- Điểm $M(x_0, f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số**.

- Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực trị của hàm số**.

b. Mối liên hệ giữa đạo hàm và cực trị

Đạo hàm là công cụ chính để tìm cực trị. Chúng ta có hai định lý quan trọng sau:

Định lý 1 (Điều kiện cần)

Nội dung: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì **$f'(x_0) = 0$** .

Giải thích: Định lý này cho biết, tại các điểm cực trị (nếu có đạo hàm), tiếp tuyến của đồ thị hàm số sẽ song song hoặc trùng với trục hoành. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Tức là, nếu $f'(x_0) = 0$, chưa chắc x_0 đã là điểm cực trị. Ví dụ, hàm số $y = x^3$ có $y' = 3x^2$, $y'(0) = 0$ nhưng $x=0$ không phải là điểm cực trị.

Định lý 2 (Điều kiện đủ)

Đây chính là cơ sở của phương pháp lập bảng biến thiên.

Nội dung: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên các khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $(x_0; x_0 + h)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương (+) sang âm (-) khi x đi qua x_0 thì x_0 là một **điểm cực đại** của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm (-) sang dương (+) khi x đi qua x_0 thì x_0 là một **điểm cực tiểu** của hàm số.

Giải thích: Sự đổi dấu của đạo hàm cho thấy sự thay đổi về chiều biến thiên của hàm số. Từ đang đi lên (đồng biến, $f' > 0$) chuyển sang đi xuống (nghịch biến, $f' < 0$) tạo thành một "đỉnh núi" (cực đại). Ngược lại, từ đang đi xuống chuyển sang đi lên tạo thành một "thung lũng" (cực tiểu).

2. Phương pháp tìm cực trị bằng Bảng biến thiên (Quy tắc 1)

Đây là phương pháp tổng quát và hiệu quả nhất, áp dụng được cho hầu hết các loại hàm số. Các bước thực hiện như sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định (TXĐ) của hàm số.**
- Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.**
- Bước 3: Tìm các điểm tới hạn.** Đó là các điểm x_i mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định.
- Bước 4: Lập bảng biến thiên.**

Bảng biến thiên gồm 3 dòng: x , y' , và y .

- **Dòng x :** Sắp xếp các điểm tới hạn và các điểm làm hàm số gián đoạn theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.
- **Dòng y' :** Xét dấu của y' trên các khoảng được tạo bởi các điểm trên. Cách xét dấu phổ biến là chọn một giá trị bất kỳ trong mỗi khoảng, thay vào y' để xác định dấu.
- **Dòng y :** Dựa vào dấu của y' để vẽ chiều biến thiên của hàm số. Nếu $y' > 0$, vẽ mũi tên đi lên ($\nearrow$). Nếu $y' < 0$, vẽ mũi tên đi xuống ($\searrow$). Tính các giá trị

tại các điểm cực trị và các giới hạn tại vô cực.

5. **Bước 5: Kết luận.** Dựa vào bảng biến thiên, xác định các điểm cực đại, cực tiểu.

- Nếu y' đổi dấu từ (+) sang (-) tại x_0 , hàm số đạt **cực đại** tại x_0 .
- Nếu y' đổi dấu từ (-) sang (+) tại x_0 , hàm số đạt **cực tiểu** tại x_0 .

3. Ví dụ áp dụng cho các dạng hàm số thường gặp

a. Dạng 1: Hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Hàm số này có đạo hàm y' là một tam thức bậc hai. Số điểm cực trị của hàm số phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. **TXĐ:** $D = \mathbb{R}$.

2. **Đạo hàm:** $y' = 3x^2 - 6x$.

3. **Điểm tới hạn:** Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

4. **Bảng biến thiên:**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 ($y_{\text{CĐ}}$)	$\searrow$	-2 (y_{CT})	$\nearrow$	$+\infty$

5. Kết luận:

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, giá trị cực đại $y_{CD} = 2$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -2$.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

1. **TXĐ:** $D = \mathbb{R}$.

2. **Đạo hàm:** $y' = -3x^2 + 3$.

3. **Điểm tới hạn:** Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

4. **Bảng biến thiên:**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 (y_{CT})	$\nearrow$	3 (y_{CD})	$\searrow$	$-\infty$

5. Kết luận:

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -1$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{CD} = 3$.

b. Dạng 2: Hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$. Phương trình $y' = 0$ luôn có một nghiệm $x = 0$. Số cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$.

1. **TXĐ:** $D = \mathbb{R}$.

2. **Đạo hàm:** $y' = 4x^3 - 16x$.

3. **Điểm tới hạn:** Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2, x = -2$.

4. **Bảng biến thiên:**

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	-13 (y_{CT})	$\nearrow$	3 ($y_{CĐ}$)	$\searrow$	-13 (y_{CT})	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Kết luận:**

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CĐ} = 3$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $x = 2, y_{CT} = -13$.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.

1. **TXĐ:** $D = \mathbb{R}$.

2. **Đạo hàm:** $y' = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$.

3. **Điểm tới hạn:** Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 + 1) = 0$. Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x , nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

4. **Bảng biến thiên:**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	-	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1 (y_CĐ)	$\searrow$	$-\infty$

5. **Kết luận:** Hàm số có một điểm cực trị duy nhất, là điểm cực đại tại $x = 0$, $y_{\text{CĐ}} = 1$.

c. Dạng 3: Hàm phân thức $y = (ax^2 + bx + c) / (mx + n)$

Đối với hàm phân thức, cần chú ý đến điểm làm cho mẫu bằng 0 (điểm gián đoạn).

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $y = (x^2 - x + 1) / (x - 1)$.

1. **TXĐ:** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. **Đạo hàm:** $y' = [(2x - 1)(x - 1) - 1(x^2 - x + 1)] / (x - 1)^2 = (2x^2 - 3x + 1 - x^2 + x - 1) / (x - 1)^2 = (x^2 - 2x) / (x - 1)^2$.

3. **Điểm tới hạn:** Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$. Cả hai nghiệm đều thuộc TXĐ.

4. **Bảng biến thiên:** Chú ý điểm $x=1$ làm y và y' không xác định.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1 (y _{CD})	$\searrow$	 $-\infty + \infty$	$\searrow$	3 (y _{CT})	$\nearrow$	$+\infty$

5. Kết luận:

- Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -1$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = 3$.

4. Các lưu ý quan trọng và sai lầm thường gặp

- **Phân biệt rõ các khái niệm:** "Điểm cực trị của hàm số" là giá trị x_0 , "giá trị cực trị" là $y(x_0)$, và "điểm cực trị của đồ thị" là cặp tọa độ $(x_0, y(x_0))$.
- **$y' = 0$ không đủ để kết luận:** Luôn phải kiểm tra sự đổi dấu của y' . Nếu y' không đổi dấu khi đi qua nghiệm (nghiệm kép), thì đó không phải là điểm cực trị.
- **Hàm số phải liên tục tại điểm cực trị:** Một điểm x_0 chỉ được coi là điểm cực trị nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại đó. Nếu hàm số gián đoạn tại x_0 thì dù y' có đổi dấu qua đó, x_0 cũng không phải là điểm cực trị.
- **Cẩn thận với tập xác định:** Sau khi giải phương trình $y' = 0$, phải kiểm tra xem các nghiệm có thuộc tập xác định của hàm số hay không.
- **Xét dấu y' chính xác:** Đối với các hàm phức tạp, cách an toàn nhất để xét dấu y' là chọn một giá trị đại diện trong từng khoảng và thay vào biểu thức y'

để kiểm tra dấu, thay vì dùng các quy tắc ghi nhớ máy móc có thể gây nhầm lẫn.

VIDOCU.COM