

Chuyên đề Tích phân và Ứng dụng (Diện tích - Thể tích)

Tài liệu này tổng hợp toàn bộ kiến thức cốt lõi về Nguyên hàm, Tích phân và các ứng dụng quan trọng trong việc tính toán diện tích hình phẳng và thể tích vật thể tròn xoay, giúp học sinh nắm vững nền tảng và vận dụng hiệu quả trong các kỳ thi.

A. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa Nguyên hàm

Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

- **Công thức tổng quát:** $\int f(x)dx = F(x) + C$
- **Giải thích:** Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số bất kỳ. Ký hiệu $\int f(x)dx$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 1: Tìm một nguyên hàm của $f(x) = 2x$.

Giải: Ta có $(x^2)' = 2x$. Vậy $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x$. Họ nguyên hàm là $\int 2xdx = x^2 + C$.

Ví dụ 2: Hàm số $F(x) = \sin(x)$ có phải là nguyên hàm của $f(x) = \cos(x)$ không?

Giải: Có, vì $F'(x) = (\sin(x))' = \cos(x) = f(x)$.

2. Tính chất của Nguyên hàm

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$: Đạo hàm của một nguyên hàm bằng chính hàm số dưới dấu tích phân.
2. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ (với k là hằng số khác 0): Có thể đưa hằng số ra ngoài dấu nguyên hàm.
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$: Nguyên hàm của một tổng (hiệu) bằng tổng (hiệu) các nguyên hàm.

Ví dụ: Tìm nguyên hàm của $f(x) = 3x^2 - 4\cos(x)$.

Giải: Áp dụng tính chất, ta có:

$$\begin{aligned}\int (3x^2 - 4\cos(x))dx &= \int 3x^2dx - \int 4\cos(x)dx \\&= 3\int x^2dx - 4\int \cos(x)dx \\&= 3(x^3/3) - 4(\sin(x)) + C \\&= x^3 - 4\sin(x) + C.\end{aligned}$$

3. Bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp

Hàm số f(x)	Nguyên hàm ∫f(x)dx
0	C (hằng số)
1	x + C
x ^α (α ≠ -1)	x ^{α+1} /(α+1) + C
1/x	ln x + C
e ^x	e ^x + C
a ^x (a>0, a≠1)	a ^x /ln(a) + C
cos(x)	sin(x) + C
sin(x)	-cos(x) + C
1/cos ² (x)	tan(x) + C
1/sin ² (x)	-cot(x) + C

Bảng nguyên hàm mở rộng (hàm hợp):

- $\int (ax+b)^{\alpha} dx = (1/a) * [(ax+b)^{\alpha+1}/(\alpha+1)] + C$
- $\int (1/(ax+b)) dx = (1/a) * \ln|ax+b| + C$
- $\int e^{ax+b} dx = (1/a) * e^{ax+b} + C$
- $\int \sin(ax+b) dx = -(1/a) * \cos(ax+b) + C$
- $\int \cos(ax+b) dx = (1/a) * \sin(ax+b) + C$

B. TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa Tích phân (Công thức Newton-Leibniz)

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn đó, thì tích phân từ a đến b của $f(x)$ được định nghĩa là:

- **Công thức:** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- **Giải thích:** Giá trị của tích phân xác định là hiệu số của giá trị nguyên hàm tại cận trên (b) và cận dưới (a). Kết quả là một hằng số, không phụ thuộc vào biến số x .

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^1 3x^2 dx$.

Giải: Một nguyên hàm của $f(x) = 3x^2$ là $F(x) = x^3$.

Vậy $I = F(1) - F(0) = 1^3 - 0^3 = 1$.

Ví dụ 2: Tính $J = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$.

Giải: Một nguyên hàm của $f(x) = \cos(x)$ là $F(x) = \sin(x)$.

Vậy $J = F(\pi/2) - F(0) = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$.

2. Tính chất của Tích phân

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (với $a < c < b$)
4. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
6. Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Ví dụ: Cho $\int_0^2 f(x)dx = 5$ và $\int_0^2 g(x)dx = -2$. Tính $I = \int_0^2 [2f(x) + 3g(x)]dx$.

Giải: $I = 2\int_0^2 f(x)dx + 3\int_0^2 g(x)dx = 2(5) + 3(-2) = 10 - 6 = 4$.

3. Các phương pháp tính Tích phân

a. Phương pháp đổi biến số

Dạng 1: Đặt $t = u(x)$

1. Đặt $t = u(x)$.
2. Tính vi phân: $dt = u'(x)dx$.
3. Đổi cận: $x = a \rightarrow t = u(a)$; $x = b \rightarrow t = u(b)$.
4. Biểu diễn $f(x)dx$ theo t và dt .
5. Tính tích phân theo biến t .

Ví dụ: Tính $I = \int_0^1 x(x^2+1)^2dx$.

Giải:

1. Đặt $t = x^2 + 1$.
2. Vi phân: $dt = 2xdx \rightarrow xdx = dt/2$.
3. Đổi cận: $x = 0 \rightarrow t = 1$; $x = 1 \rightarrow t = 2$.
4. $I = \int_1^2 t^2 (dt/2) = (1/2) \int_1^2 t^2 dt$.
5. $I = (1/2) * [t^3/3]_1^2 = (1/2) * (8/3 - 1/3) = 7/6$.

Dạng 2: Đặt $x = u(t)$ (Lượng giác hóa)

Thường dùng khi biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, x^2+a^2 .

Ví dụ: Tính $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Giải:

1. Đặt $x = \sin(t)$, với $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

2. Vi phân: $dx = \cos(t)dt$.

3. Đổi cận: $x = 0 \rightarrow t = 0$; $x = 1 \rightarrow t = \pi/2$.

4. $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)|$. Vì $t \in [0, \pi/2]$ nên $\cos(t) \geq 0$, do đó $|\cos(t)| = \cos(t)$.

5. $I = \int_0^{\pi/2} \cos(t) * \cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\cos(2t))}{2} dt$
 $= (1/2) * [t + (1/2)\sin(2t)]_0^{\pi/2} = (1/2) * [(\pi/2 + 0) - (0 + 0)] = \pi/4$.

b. Phương pháp Tích phân từng phần

Dùng khi hàm dưới dấu tích phân là tích của hai loại hàm khác nhau (đa thức, log, mũ, lượng giác).

• **Công thức:** $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

• **Cách đặt u và dv:** Ưu tiên đặt u theo thứ tự "Nhất Log, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ" (Logarit, Đa thức, Lượng giác, Mũ). Phần còn lại là dv.

Ví dụ: Tính $I = \int_0^1 x.e^x dx$.

Giải:

Theo quy tắc, ta đặt:

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

Áp dụng công thức:

$$I = [x.e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= (1.e^1 - 0.e^0) - [e^x]_0^1$$

$$= e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

C. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

a. Hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành ($y=0$) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$.

- **Công thức:** $S = \int_a^b |f(x)| dx$
- **Lưu ý:** Để phá dấu giá trị tuyệt đối, ta xét dấu của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a, b]$, $S = |\int_a^b f(x) dx|$.

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục Ox , và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$.

Giải: Trên đoạn $[0, 1]$, $y = x^2 \geq 0$.

$$S = \int_0^1 |x^2| dx = \int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3 - 0 = 1/3 \text{ (đvdt)}.$$

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$.

- **Công thức:** $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- **Lưu ý:** Nếu bài toán không cho cận a , b , ta phải giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ để tìm cận. Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 ($x_1 < x_2$), thì $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx$.

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 - 2x$ và $y = x$.

Giải:

1. Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$. Vậy hai cận là $a=0$, $b=3$.

2. Trên đoạn $[0, 3]$, ta xét dấu $f(x) - g(x) = (x^2 - 2x) - x = x^2 - 3x$. Biểu thức này ≤ 0 khi $x \in [0, 3]$.

$$\begin{aligned} 3. S &= \int_0^3 |x^2 - 3x| dx = \int_0^3 -(x^2 - 3x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx \\ &= [3x^2/2 - x^3/3]_0^3 = (27/2 - 27/3) - 0 = 27/6 = 9/2 \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

2. Tính thể tích vật thể

a. Thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Ox

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = f(x)$, trục Ox, $x=a$, $x=b$. Khi quay (H) quanh trục Ox, ta được một vật thể tròn xoay.

• **Công thức:** $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

Ví dụ: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, trục Ox, $x=0$, $x=4$ quanh trục Ox.

Giải: Áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx \\ &= \pi [x^2/2]_0^4 = \pi (16/2 - 0) = 8\pi \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

b. Thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Oy

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $x = g(y)$, trục Oy, $y=c$, $y=d$. Khi quay (H) quanh trục Oy, ta được một vật thể tròn xoay.

• **Công thức:** $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

Ví dụ: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$, trục Oy , $y=1$, $y=8$ quanh trục Oy .

Giải:

1. Từ $y = x^3$, ta có $x = \sqrt[3]{y}$. Vậy $g(y) = y^{(1/3)}$.

2. Áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_1^8 [y^{(1/3)}]^2 dy = \pi \int_1^8 y^{(2/3)} dy$$

$$= \pi * [y^{(5/3)} / (5/3)]_1^8 = (3\pi/5) * [y^{(5/3)}]_1^8$$

$$= (3\pi/5) * (8^{(5/3)} - 1^{(5/3)}) = (3\pi/5) * (32 - 1) = 93\pi/5 \text{ (đvtt)}.$$

c. Thể tích vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai đường cong quay quanh Ox

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = g(x)$ (với $f(x) \geq g(x) \geq 0$ trên $[a,b]$), $x=a$, $x=b$. Khi quay (H) quanh trục Ox .

• **Công thức:** $V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$

Ví dụ: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x$ và $y = x^2$ quanh trục Ox .

Giải:

1. Phương trình hoành độ giao điểm: $x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

2. Trên $[0, 1]$, ta có $x \geq x^2 \geq 0$. Vậy $f(x) = x$, $g(x) = x^2$.

3. Áp dụng công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \pi * [x^3/3 - x^5/5]_0^1 = \pi * (1/3 - 1/5) = 2\pi/15 \text{ (đvtt)}.$$