

# Tổng hợp phương pháp giải phương trình lượng giác

Phương trình lượng giác là một phần kiến thức quan trọng trong chương trình Toán lớp 11. Việc nắm vững các phương pháp giải sẽ giúp học sinh tự tin giải quyết các bài toán liên quan. Tài liệu này tổng hợp đầy đủ các dạng từ cơ bản đến nâng cao.

## I. Phương trình lượng giác cơ bản

Đây là bốn dạng phương trình nền tảng, là cơ sở để giải quyết các phương trình phức tạp hơn.

| Phương trình  | Điều kiện có nghiệm | Công thức nghiệm ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                        |
|---------------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\sin(x) = a$ | $ a  \leq 1$        | $x = \alpha + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \alpha + k2\pi$ (với $\sin(\alpha) = a$ ) |
| $\cos(x) = a$ | $ a  \leq 1$        | $x = \alpha + k2\pi$ hoặc $x = -\alpha + k2\pi$ (với $\cos(\alpha) = a$ )      |
| $\tan(x) = a$ | $a \in \mathbb{R}$  | $x = \alpha + k\pi$ (với $\tan(\alpha) = a$ )                                  |
| $\cot(x) = a$ | $a \in \mathbb{R}$  | $x = \alpha + k\pi$ (với $\cot(\alpha) = a$ )                                  |

## 1. Phương trình $\sin(x) = a$

**Công thức:** Nếu  $|a| \leq 1$ , đặt  $a = \sin(\alpha)$ , phương trình có nghiệm:

$$[x = \alpha + k2\pi] \text{ và } [x = \pi - \alpha + k2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

*Giải thích:* Ta tìm một góc  $\alpha$  sao cho  $\sin$  của nó bằng  $a$ . Do tính tuần hoàn và đối xứng của hàm  $\sin$  trên đường tròn lượng giác, ta có hai họ nghiệm.

- **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $\sin(x) = 1/2$ .

Ta có  $1/2 = \sin(\pi/6)$ . Áp dụng công thức, ta được:

$$[x = \pi/6 + k2\pi] \text{ hoặc } [x = \pi - \pi/6 + k2\pi] \Leftrightarrow [x = \pi/6 + k2\pi] \text{ hoặc } [x = 5\pi/6 + k2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

- **Ví dụ 2:** Giải phương trình  $\sin(2x) = 1/3$ .

Vì  $1/3$  không phải giá trị  $\sin$  của góc đặc biệt, ta dùng  $\arcsin$ :

$$[2x = \arcsin(1/3) + k2\pi] \text{ hoặc } [2x = \pi - \arcsin(1/3) + k2\pi]$$

$$\Leftrightarrow [x = (1/2)\arcsin(1/3) + k\pi] \text{ hoặc } [x = \pi/2 - (1/2)\arcsin(1/3) + k\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

## 2. Phương trình $\cos(x) = a$

**Công thức:** Nếu  $|a| \leq 1$ , đặt  $a = \cos(\alpha)$ , phương trình có nghiệm:

$$[x = \alpha + k2\pi] \text{ và } [x = -\alpha + k2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

*Giải thích:* Tương tự hàm  $\sin$ , ta tìm góc  $\alpha$  có  $\cos$  bằng  $a$ . Do  $\cos$  là hàm chẵn ( $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ), ta có hai họ nghiệm đối nhau.

- **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $\cos(x) = -\sqrt{2}/2$ .

Ta có  $-\sqrt{2}/2 = \cos(3\pi/4)$ . Áp dụng công thức, ta được:

$$[x = 3\pi/4 + k2\pi] \text{ hoặc } [x = -3\pi/4 + k2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

### 3. Phương trình $\tan(x) = a$

**Công thức:** Với mọi  $a \in \mathbb{R}$ , đặt  $a = \tan(\alpha)$ , phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

*Giải thích:* Hàm tan có chu kỳ tuần hoàn là  $\pi$  nên chỉ có một họ nghiệm.

- **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $\tan(x - 15^\circ) = \sqrt{3}$ .

Ta có  $\sqrt{3} = \tan(60^\circ)$ . Áp dụng công thức:

$$x - 15^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 75^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

### 4. Phương trình $\cot(x) = a$

**Công thức:** Với mọi  $a \in \mathbb{R}$ , đặt  $a = \cot(\alpha)$ , phương trình có nghiệm:

$$x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

*Giải thích:* Tương tự hàm tan, hàm cot có chu kỳ tuần hoàn là  $\pi$ .

- **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $\cot(3x) = -1$ .

Ta có  $-1 = \cot(-\pi/4)$ . Áp dụng công thức:

$$3x = -\pi/4 + k\pi \Leftrightarrow x = -\pi/12 + k\pi/3 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

## II. Một số phương trình lượng giác thường gặp

Đây là các dạng phương trình phức tạp hơn, cần biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

## 1. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

**Dạng tổng quát:**  $a.t^2 + b.t + c = 0$ , trong đó  $t$  là một trong các hàm số  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cot(x)$ .

*Phương pháp giải:*

1. Đặt ẩn phụ  $t =$  hàm số lượng giác tương ứng.
2. Đặt điều kiện cho ẩn phụ  $t$  (nếu có):  $-1 \leq t \leq 1$  nếu  $t = \sin(x)$  hoặc  $t = \cos(x)$ .
3. Giải phương trình bậc hai  $at^2 + bt + c = 0$  để tìm  $t$ .
4. So sánh  $t$  với điều kiện và giải các phương trình lượng giác cơ bản tương ứng.

• **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ .

Đặt  $t = \sin x$ , điều kiện  $|t| \leq 1$ . Phương trình trở thành:  $2t^2 + 3t - 2 = 0$ .

Giải ra ta được  $t = 1/2$  (nhận) hoặc  $t = -2$  (loại).

Với  $t = 1/2$ , ta có  $\sin x = 1/2 \Leftrightarrow [x = \pi/6 + k2\pi]$  hoặc  $[x = 5\pi/6 + k2\pi]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

• **Ví dụ 2:** Giải phương trình  $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$ .

Đặt  $t = \tan x$  (không có điều kiện). Phương trình trở thành:  $t^2 + (1 - \sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0$ .

Giải ra ta được  $t = -1$  hoặc  $t = \sqrt{3}$ .

Với  $t = -1$ ,  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi/4 + k\pi$ .

Với  $t = \sqrt{3}$ ,  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pi/3 + k\pi$ .

## 2. Phương trình bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$

**Dạng tổng quát:**  $a.\sin x + b.\cos x = c$

*Phương pháp giải (Cách chia):*

1. Kiểm tra điều kiện có nghiệm:  $a^2 + b^2 \geq c^2$ . Nếu không thỏa mãn, phương trình vô nghiệm.
2. Chia cả hai vế của phương trình cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .
3. Phương trình có dạng:  $(a/\sqrt{a^2+b^2})\sin x + (b/\sqrt{a^2+b^2})\cos x = c/\sqrt{a^2+b^2}$ .
4. Đặt  $a/\sqrt{a^2+b^2} = \cos(\alpha)$  và  $b/\sqrt{a^2+b^2} = \sin(\alpha)$ . Phương trình trở thành:  
 $\cos(\alpha)\sin x + \sin(\alpha)\cos x = c/\sqrt{a^2+b^2}$ .
5. Áp dụng công thức cộng:  **$\sin(x + \alpha) = c/\sqrt{a^2 + b^2}$** . Đây là phương trình cơ bản.

• **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ .

Ta có  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{2}$ . Điều kiện  $a^2 + b^2 = 4 > c^2 = 2$  (thỏa mãn).

Chia hai vế cho  $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ , ta được:

$$(\sqrt{3}/2)\sin x + (1/2)\cos x = \sqrt{2}/2.$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi/6)\sin x + \sin(\pi/6)\cos x = \sqrt{2}/2$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \pi/6) = \sin(\pi/4)$$

$$\Leftrightarrow [x + \pi/6 = \pi/4 + k2\pi] \text{ hoặc } [x + \pi/6 = \pi - \pi/4 + k2\pi]$$

$$\Leftrightarrow [x = \pi/12 + k2\pi] \text{ hoặc } [x = 7\pi/12 + k2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

### 3. Phương trình đẳng cấp bậc hai

**Dạng tổng quát:**  $a.\sin^2x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2x = d$

*Phương pháp giải:*

- Trường hợp 1: Xét  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$ . Thay vào phương trình ban đầu để kiểm tra có là nghiệm hay không.
- Trường hợp 2: Xét  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2x$ .
- Phương trình trở thành:  **$a.\tan^2x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2x)$** .
- Đây là phương trình bậc hai theo  $\tan x$ , giải như mục II.1.

• **Ví dụ 1:** Giải phương trình  $2\sin^2x + \sin x.\cos x - \cos^2x = 2$ .

Xét  $\cos x = 0$ , phương trình trở thành  $2(\pm 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$  (đúng). Vậy  $x = \pi/2 + k\pi$  là nghiệm.

Xét  $\cos x \neq 0$ , chia hai vế cho  $\cos^2x$ :

$$2\tan^2x + \tan x - 1 = 2(1/\cos^2x) = 2(1 + \tan^2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2x + \tan x - 1 = 2 + 2\tan^2x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 3 \Leftrightarrow x = \arctan(3) + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \pi/2 + k\pi$  và  $x = \arctan(3) + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

## III. Một số phương pháp giải nâng cao khác

### 1. Phương pháp sử dụng công thức biến đổi

Sử dụng các công thức nhân đôi, hạ bậc, biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng để đưa phương trình về các dạng đã biết.

- **Ví dụ (Tổng thành tích):** Giải phương trình  $\sin 5x + \sin x = \sin 3x$ .

$$\Leftrightarrow 2\sin((5x+x)/2)\cos((5x-x)/2) = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 2x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow [\sin 3x = 0] \text{ hoặc } [\cos 2x = 1/2]$$

Giải hai phương trình cơ bản này ta được các họ nghiệm.

## 2. Phương pháp đặt ẩn phụ đối xứng

Sử dụng cho các phương trình chứa  $(\sin x \pm \cos x)$  và  $\sin x.\cos x$ .

**Đặt  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$** , điều kiện  $|t| \leq \sqrt{2}$ . Suy ra  **$\sin x.\cos x = (t^2 - 1)/2$** .

**Đặt  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - \pi/4)$** , điều kiện  $|t| \leq \sqrt{2}$ . Suy ra  **$\sin x.\cos x = (1 - t^2)/2$** .

- **Ví dụ:** Giải phương trình  $\sin x + \cos x - 2\sin x.\cos x + 1 = 0$ .

Đặt  $t = \sin x + \cos x$ ,  $|t| \leq \sqrt{2}$ . Suy ra  $\sin x.\cos x = (t^2 - 1)/2$ .

Phương trình trở thành:  $t - 2((t^2 - 1)/2) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t - (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + t + 2 = 0$$

Giải ra  $t = -1$  (nhận) hoặc  $t = 2$  (loại).

Với  $t = -1$ , ta có  $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \pi/4) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \pi/4) = -1/\sqrt{2}$ .

Đây là phương trình cơ bản, giải ra ta được nghiệm.