

Phần 1: Lý thuyết trọng tâm

I. Ước và Bội

1. Khái niệm:

- Nếu số tự nhiên **a** chia hết cho số tự nhiên **b** thì ta nói **a** là **bội của b**, còn **b** là **ước của a**.
- Tập hợp các ước của a ký hiệu là **Ư(a)**.
- Tập hợp các bội của b ký hiệu là **B(b)**.

Ví dụ 1: Tìm các ước của 12.

Giải: Lần lượt chia 12 cho các số tự nhiên từ 1 đến 12, ta thấy 12 chia hết cho 1, 2, 3, 4, 6, 12. Vậy $Ư(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Ví dụ 2: Tìm các bội nhỏ hơn 30 của 5.

Giải: Lần lượt nhân 5 với 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... ta được các bội của 5 là 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... Các bội nhỏ hơn 30 là $\{0; 5; 10; 15; 20; 25\}$. Vậy $B(5) = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; \dots\}$.

II. Ước chung và Ước chung lớn nhất (ƯCLN)

1. Ước chung (ƯC)

Định nghĩa: Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

- Tập hợp các ước chung của a và b ký hiệu là **ƯC(a, b)**.

- **Cách tìm:** Viết tập hợp các ước của mỗi số, sau đó tìm các phần tử chung của các tập hợp đó.

Ví dụ: Tìm ƯC(12, 18).

Giải:

- $Ư(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
- $Ư(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$
- Các phần tử chung là 1, 2, 3, 6.
- Vậy $ƯC(12, 18) = \{1; 2; 3; 6\}$.

2. Ước chung lớn nhất (ƯCLN)

Định nghĩa: Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

- Ký hiệu: **ƯCLN(a, b)**.

Ví dụ: Từ ví dụ trên, $ƯC(12, 18) = \{1; 2; 3; 6\}$. Số lớn nhất trong tập hợp này là 6. Vậy $ƯCLN(12, 18) = 6$.

Chú ý:

- $ƯCLN(a, 1) = 1$.
- $ƯCLN(a, b, 1) = 1$.
- Nếu a chia hết cho b, thì $ƯCLN(a, b) = b$.

3. Cách tìm ƯCLN bằng phân tích ra thừa số nguyên tố

Quy tắc: Muốn tìm ƯCLN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

1. **Bước 1:** Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
2. **Bước 2:** Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.
3. **Bước 3:** Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

Ví dụ 1: Tìm ƯCLN(18, 30).

Giải:

1. Phân tích: $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
2. Thừa số nguyên tố chung là 2 và 3.
3. Số mũ nhỏ nhất của 2 là 1, của 3 là 1.
4. Vậy $\text{ƯCLN}(18, 30) = 2^1 \cdot 3^1 = 6$.

Ví dụ 2: Tìm ƯCLN(48, 60, 72).

Giải:

1. Phân tích: $48 = 2^4 \cdot 3$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$.
2. Thừa số nguyên tố chung là 2 và 3.
3. Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2 (trong 2^2), của 3 là 1 (trong 3^1).
4. Vậy $\text{ƯCLN}(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$.

4. Tìm tập hợp ước chung thông qua ƯCLN

Công thức: Để tìm ước chung của các số, ta có thể tìm ƯCLN của chúng, rồi tìm các ước của ƯCLN đó.

$$\text{ƯC}(a, b) = \text{Ư}(\text{ƯCLN}(a, b))$$

Ví dụ: Tìm $\text{ƯC}(48, 72)$ mà không cần liệt kê.

Giải:

- Ta tìm $\text{ƯCLN}(48, 72)$.
- $48 = 2^4 \cdot 3$
- $72 = 2^3 \cdot 3^2$
- $\text{ƯCLN}(48, 72) = 2^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24$.
- Vậy $\text{ƯC}(48, 72) = \text{Ư}(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.

III. Bội chung và Bội chung nhỏ nhất (BCNN)

1. Bội chung (BC)

Định nghĩa: Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

- Tập hợp các bội chung của a và b ký hiệu là **BC(a, b)**.
- **Cách tìm:** Viết tập hợp các bội của mỗi số, sau đó tìm các phần tử chung (khác 0) của các tập hợp đó.

Ví dụ: Tìm $\text{BC}(4, 6)$.

Giải:

- $B(4) = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; \dots\}$

- $B(6) = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; \dots\}$
- Các phần tử chung là 0, 12, 24, ...
- Vậy $BC(4, 6) = \{0; 12; 24; 36; \dots\}$.

2. Bội chung nhỏ nhất (BCNN)

Định nghĩa: Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của các số đó.

- Ký hiệu: **BCNN(a, b)**.

Ví dụ: Từ ví dụ trên, $BC(4, 6) = \{0; 12; 24; 36; \dots\}$. Số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp này là 12. Vậy $BCNN(4, 6) = 12$.

Chú ý:

- $BCNN(a, 1) = a$.
- Nếu a chia hết cho b, thì $BCNN(a, b) = a$.

3. Cách tìm BCNN bằng phân tích ra thừa số nguyên tố

Quy tắc: Muốn tìm BCNN của hai hay nhiều số lớn hơn 1, ta thực hiện ba bước sau:

1. **Bước 1:** Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
2. **Bước 2:** Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.
3. **Bước 3:** Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

Ví dụ 1: Tìm $BCNN(8, 12)$.

Giải:

1. Phân tích: $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \cdot 3$.
2. Thừa số nguyên tố chung là 2, riêng là 3.
3. Số mũ lớn nhất của 2 là 3, của 3 là 1.
4. Vậy $\text{BCNN}(8, 12) = 2^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24$.

Ví dụ 2: Tìm $\text{BCNN}(30, 45, 60)$.

Giải:

1. Phân tích: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3^2 \cdot 5$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.
2. Thừa số chung và riêng là 2, 3, 5.
3. Số mũ lớn nhất của 2 là 2, của 3 là 2, của 5 là 1.
4. Vậy $\text{BCNN}(30, 45, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$.

4. Tìm tập hợp bội chung thông qua BCNN

Công thức: Để tìm bội chung của các số, ta có thể tìm BCNN của chúng, rồi tìm các bội của BCNN đó.

$$\mathbf{BC(a, b) = B(BCNN(a, b))}$$

Ví dụ: Tìm $\text{BC}(30, 45)$.

Giải:

- Ta tìm $\text{BCNN}(30, 45)$.
- $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $45 = 3^2 \cdot 5$

- $BCNN(30, 45) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.
- Vậy $BC(30, 45) = B(90) = \{0; 90; 180; 270; \dots\}$.

IV. So sánh cách tìm ƯCLN và BCNN

Tiêu chí	Tìm ƯCLN	Tìm BCNN
Bước 1	Phân tích các số ra thừa số nguyên tố	
Bước 2	Chọn các thừa số nguyên tố chung	Chọn các thừa số nguyên tố chung và riêng
Bước 3	Lập tích, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất	Lập tích, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất

V. Mối quan hệ đặc biệt giữa ƯCLN và BCNN

Công thức: Tích của hai số bằng tích của ƯCLN và BCNN của chúng.

$a \cdot b = \text{ƯCLN}(a, b) \cdot \text{BCNN}(a, b)$

Ví dụ: Tìm BCNN(12, 18) bằng công thức trên.

Giải:

- Ta có: $12 \cdot 18 = 216$.
- Ở phần trước, ta đã tìm được $\text{ƯCLN}(12, 18) = 6$.
- Áp dụng công thức: $12 \cdot 18 = \text{ƯCLN}(12, 18) \cdot \text{BCNN}(12, 18)$

- $\Rightarrow 216 = 6 \cdot \text{BCNN}(12, 18)$
- $\Rightarrow \text{BCNN}(12, 18) = 216 / 6 = 36$.

Phần 2: Các dạng bài tập ứng dụng

Dạng 1: Bài toán chia đều đồ vật

Dấu hiệu: Các từ khóa "chia đều", "chia thành các nhóm bằng nhau", "nhiều nhất", "lớn nhất". Đây là bài toán tìm **ƯCLN**.

Ví dụ: Một lớp 6 có 24 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Hỏi có thể chia lớp thành nhiều nhất bao nhiêu tổ sao cho số học sinh nam và số học sinh nữ ở mỗi tổ đều bằng nhau? Khi đó mỗi tổ có bao nhiêu nam, bao nhiêu nữ?

Giải:

- Gọi số tổ có thể chia được là a .
- Theo đề bài, 24 phải chia hết cho a và 18 phải chia hết cho a . Do đó, $a \in \text{ƯC}(24, 18)$.
- Vì số tổ là nhiều nhất nên $a = \text{ƯCLN}(24, 18)$.
- Ta có: $24 = 2^3 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3^2$.
- $\text{ƯCLN}(24, 18) = 2 \cdot 3 = 6$.
- Vậy có thể chia lớp thành nhiều nhất 6 tổ.
- Khi đó, mỗi tổ có: $24 / 6 = 4$ học sinh nam.
- Mỗi tổ có: $18 / 6 = 3$ học sinh nữ.

Dạng 2: Bài toán thực tế liên quan đến chu kỳ

Dấu hiệu: Các từ khóa "cùng một lúc", "cùng gặp lại", "ít nhất", "nhỏ nhất". Đây là bài toán tìm **BCNN**.

Ví dụ: Ba chiếc xe buýt cùng khởi hành lúc 6 giờ sáng từ một bến xe. Xe thứ nhất cứ 10 phút về bến một lần, xe thứ hai cứ 12 phút về bến một lần, xe thứ ba cứ 15 phút về bến một lần. Hỏi vào lúc mấy giờ cả ba xe lại cùng về bến lần tiếp theo?

Giải:

- Gọi thời gian để cả ba xe cùng về bến lần tiếp theo là a (phút).
- Theo đề bài, a phải là bội của 10, 12 và 15. Do đó, $a \in BC(10, 12, 15)$.
- Vì đây là lần tiếp theo gần nhất nên $a = BCNN(10, 12, 15)$.
- Ta có: $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$.
- $BCNN(10, 12, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
- Vậy sau 60 phút (tức là 1 giờ) thì cả ba xe lại cùng về bến.
- Thời điểm đó là: 6 giờ + 1 giờ = 7 giờ sáng.

Dạng 3: Bài toán tìm số thỏa mãn điều kiện chia hết

Dấu hiệu: Tìm một số x biết x chia hết cho a , x chia hết cho b , và x nằm trong một khoảng cho trước. Đây là bài toán tìm **Bội chung**.

Ví dụ: Tìm số học sinh của một khối 6, biết rằng khi xếp hàng 10, hàng 12, hàng 15 đều vừa đủ và số học sinh trong khoảng từ 150 đến 200 em.

Giải:

- Gọi số học sinh là x .
- Theo đề bài, $x \vdots 10, x \vdots 12, x \vdots 15$. Suy ra $x \in BC(10, 12, 15)$.
- Ta tìm $BCNN(10, 12, 15) = 60$ (như ví dụ trên).
- Do đó, $x \in B(60) = \{0; 60; 120; 180; 240; \dots\}$.
- Vì 150×200 nên $x = 180$.
- Vậy khối 6 có 180 học sinh.

Dạng 4: Bài toán tìm số chia có dư

Dấu hiệu: Tìm một số x biết x chia cho a dư r , chia cho b dư $r, \dots$ Đây là bài toán tìm **Bội chung** rồi cộng với số dư.

Ví dụ: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0, biết rằng khi chia a cho 12, cho 15 và cho 18 đều dư 5.

Giải:

- Theo đề bài, a chia cho 12, 15, 18 đều dư 5.
- Điều này có nghĩa là $(a - 5)$ chia hết cho 12, 15 và 18.
- Vậy $(a - 5) \in BC(12, 15, 18)$.
- Vì a là số nhỏ nhất khác 0, nên $(a - 5)$ là $BCNN(12, 15, 18)$.
- Ta có: $12 = 2^2 \cdot 3; 15 = 3 \cdot 5; 18 = 2 \cdot 3^2$.
- $BCNN(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$.
- Suy ra $a - 5 = 180$.
- Vậy $a = 180 + 5 = 185$.