

Tổng hợp kiến thức Phương trình bậc hai một ẩn và Công thức nghiệm

Đây là tài liệu ôn tập toàn diện về chuyên đề phương trình bậc hai một ẩn, một trong những nội dung trọng tâm của chương trình Toán học lớp 9. Tài liệu cung cấp đầy đủ định nghĩa, công thức và các ví dụ minh họa chi tiết.

1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Trong đó:

- x là ẩn số.
- a, b, c là các số cho trước gọi là các hệ số.
- Điều kiện bắt buộc: $a \neq 0$.

Ví dụ:

1. Phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ là một phương trình bậc hai với $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$.
2. Phương trình $x^2 - 9 = 0$ là một phương trình bậc hai với $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$ (dạng khuyết b).

3. Phương trình $-3x^2 + 7x = 0$ là một phương trình bậc hai với $a = -3$, $b = 7$, $c = 0$ (dạng khuyết c).

2. Công thức nghiệm tổng quát

Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), ta sử dụng công thức nghiệm dựa vào biệt thức Delta (Δ).

2.1. Biệt thức Delta (Δ)

Biệt thức Delta được tính theo công thức:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Giá trị của Δ quyết định số nghiệm của phương trình.

2.2. Các trường hợp của Delta và nghiệm của phương trình

Dựa vào dấu của Δ , ta có thể kết luận số nghiệm của phương trình như sau:

Trường hợp của Δ	Kết luận về nghiệm	Công thức nghiệm
$\Delta > 0$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Phương trình có nghiệm kép (hai nghiệm bằng nhau).	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	Phương trình vô nghiệm.	Không có

2.3. Ví dụ minh họa

- **Ví dụ 1 ($\Delta > 0$):** Giải phương trình $x^2 - 7x + 10 = 0$

Xác định hệ số: $a = 1, b = -7, c = 10$.

Tính Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$.

Vì $\Delta = 9 > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$.

Áp dụng công thức nghiệm:

$$x_1 = (-(-7) + 3) / (2 \cdot 1) = (7 + 3) / 2 = 10 / 2 = 5.$$

$$x_2 = (-(-7) - 3) / (2 \cdot 1) = (7 - 3) / 2 = 4 / 2 = 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 5\}$.

- **Ví dụ 2 ($\Delta = 0$):** Giải phương trình $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Xác định hệ số: $a = 9, b = -6, c = 1$.

Tính Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$.

Vì $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép.

Áp dụng công thức nghiệm:

$$x_1 = x_2 = -b / 2a = -(-6) / (2 \cdot 9) = 6 / 18 = 1/3.$$

Vậy phương trình có nghiệm kép $x = 1/3$.

- **Ví dụ 3 ($\Delta < 0$):** Giải phương trình $2x^2 + 3x + 5 = 0$

Xác định hệ số: $a = 2, b = 3, c = 5$.

Tính Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31$.

Vì $\Delta = -31 < 0$, phương trình vô nghiệm.

3. Công thức nghiệm thu gọn

Khi hệ số **b** của phương trình là một số chẵn, ta có thể sử dụng công thức nghiệm thu gọn để việc tính toán trở nên đơn giản hơn. Ta đặt **b = 2b'**.

3.1. Biệt thức Delta phẩy (Δ')

Biệt thức Delta phẩy được tính theo công thức:

$\Delta' = (b')^2 - ac$ (với $b' = b/2$)

3.2. Các trường hợp của Delta phẩy và nghiệm của phương trình

Tương tự như Delta, dấu của Δ' quyết định số nghiệm của phương trình:

Trường hợp của Δ'	Kết luận về nghiệm	Công thức nghiệm
$\Delta' > 0$	Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.	$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$
$\Delta' = 0$	Phương trình có nghiệm kép.	$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$
$\Delta' < 0$	Phương trình vô nghiệm.	Không có

3.3. Ví dụ minh họa

- **Ví dụ:** Giải phương trình $3x^2 - 8x + 4 = 0$

Xác định hệ số: $a = 3$, $b = -8$, $c = 4$.

Vì $b = -8$ là số chẵn, ta dùng công thức nghiệm thu gọn. Ta có $b' = b/2 = -8/2 = -4$.

Tính Δ' : $\Delta' = (b')^2 - ac = (-4)^2 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$.

Vì $\Delta' = 4 > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4} = 2$.

Áp dụng công thức nghiệm thu gọn:

$$x_1 = (-b' + \sqrt{\Delta'}) / a = (-(-4) + 2) / 3 = (4 + 2) / 3 = 6 / 3 = 2.$$

$$x_2 = (-b' - \sqrt{\Delta'}) / a = (-(-4) - 2) / 3 = (4 - 2) / 3 = 2 / 3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2/3; 2\}$.

4. Các trường hợp đặc biệt của phương trình bậc hai

Một số phương trình bậc hai có dạng khuyết hệ số b hoặc c , có thể giải nhanh hơn mà không cần dùng công thức nghiệm.

- **Phương trình khuyết hệ số c ($c = 0$)**

Phương trình có dạng: **$ax^2 + bx = 0$**

Cách giải: Đặt nhân tử chung.

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$$

Phương trình luôn có hai nghiệm:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -b/a$$

Ví dụ: Giải phương trình $5x^2 - 20x = 0$.

$$5x(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4.$$

Vậy tập nghiệm là $S = \{0; 4\}$.

• Phương trình khuyết hệ số b ($b = 0$)

Phương trình có dạng: $ax^2 + c = 0$

Cách giải: Chuyển vế và khai căn.

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -c/a$$

- Nếu $-c/a \geq 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau: $x = \pm\sqrt{-c/a}$.
- Nếu $-c/a < 0$, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình $2x^2 - 18 = 0$.

$$2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Vậy tập nghiệm là $S = \{-3; 3\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $3x^2 + 12 = 0$.

$$3x^2 = -12 \Leftrightarrow x^2 = -4.$$

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi x , nên phương trình $x^2 = -4$ vô nghiệm.

5. Lưu ý quan trọng khi giải phương trình bậc hai

1. **Xác định đúng hệ số:** Luôn xác định chính xác các hệ số a , b , c , đặc biệt là dấu của chúng.
2. **Kiểm tra trường hợp đặc biệt:** Trước khi áp dụng công thức nghiệm, hãy kiểm tra xem phương trình có dạng khuyết b hoặc c không để giải nhanh hơn.
3. **Ưu tiên công thức thu gọn:** Nếu hệ số b là số chẵn, hãy dùng công thức nghiệm thu gọn (Δ') để giảm sai sót trong tính toán.
4. **Cẩn thận khi tính toán:** Các lỗi thường gặp là sai dấu khi tính Δ , sai khi khai căn hoặc rút gọn nghiệm. Hãy kiểm tra lại các bước tính toán của mình.