

Chuyên đề: Đường trung bình của tam giác và hình thang

Đường trung bình của tam giác và hình thang là một trong những kiến thức nền tảng quan trọng trong chương trình Hình học lớp 8. Việc nắm vững định nghĩa và các định lý liên quan sẽ giúp học sinh giải quyết hiệu quả nhiều dạng bài toán từ chứng minh đến tính toán.

A. Đường trung bình của tam giác

1. Định nghĩa

Định nghĩa: Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

- Trong tam giác ABC, nếu M là trung điểm của cạnh AB và N là trung điểm của cạnh AC thì đoạn thẳng MN được gọi là đường trung bình của tam giác ABC.

2. Tính chất và Định lý

Có hai định lý quan trọng liên quan đến đường trung bình của tam giác, thường được gọi là định lý thuận và định lý đảo.

Định lý 1 (Định lý đảo)

Phát biểu: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

Tóm tắt: Cho tam giác ABC:

Nếu M là trung điểm AB ($AM = MB$) và $MN \parallel BC$ ($N \in AC$) thì N là trung điểm AC ($AN = NC$).

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AB. Kẻ đường thẳng qua M song song với BC, cắt AC tại N. Biết $AC = 10$ cm. Tính độ dài AN.

Giải:

Xét tam giác ABC, ta có:

- M là trung điểm của AB (giả thiết)
- $MN \parallel BC$ (giả thiết)

Suy ra N là trung điểm của AC (theo Định lý 1 về đường trung bình của tam giác).

Vì N là trung điểm của AC nên $AN = NC = AC / 2 = 10 / 2 = 5$ cm.

Vậy $AN = 5$ cm.

Ví dụ 2: Cho tam giác DEF vuông tại D. Gọi I là trung điểm của DE. Qua I kẻ đường thẳng song song với EF, cắt DF tại K. Chứng minh K là trung điểm của DF.

Giải:

Xét tam giác DEF, ta có:

- I là trung điểm của DE (giả thiết)
- $IK \parallel EF$ (giả thiết)

Theo Định lý 1, đường thẳng đi qua trung điểm cạnh DE và song song với cạnh EF sẽ đi qua trung điểm cạnh DF.

Vậy K là trung điểm của DF.

Định lý 2 (Định lý thuận)

Phát biểu: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

Tóm tắt: Cho tam giác ABC, MN là đường trung bình:

Nếu M là trung điểm AB ($AM = MB$) và N là trung điểm AC ($AN = NC$) thì $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2} BC$.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

Giải:

Xét tam giác ABC, ta có:

- M là trung điểm của AB (giả thiết)
- N là trung điểm của AC (giả thiết)

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Theo Định lý 2, ta có: $MN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} * 10 = 5$ cm.

Vậy $MN = 5$ cm.

Ví dụ 2: Cho tam giác PQR. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của PQ và PR. Biết $EF = 7$ cm. Tính độ dài cạnh QR.

Giải:

Xét tam giác PQR, ta có E là trung điểm PQ và F là trung điểm PR. Do đó, EF là đường trung bình của tam giác PQR.

Theo tính chất đường trung bình, ta có: $EF = \frac{1}{2} QR$.

Suy ra $QR = 2 * EF = 2 * 7 = 14 \text{ cm}$.

Vậy $QR = 14 \text{ cm}$.

B. Đường trung bình của hình thang

1. Định nghĩa

Định nghĩa: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.

- Trong hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), nếu E là trung điểm của cạnh bên AD và F là trung điểm của cạnh bên BC thì đoạn thẳng EF được gọi là đường trung bình của hình thang ABCD.

2. Tính chất và Định lý

Định lý 3 (Tương tự Định lý 1 của tam giác)

Phát biểu: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh bên thứ hai.

Tóm tắt: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$):

Nếu E là trung điểm AD ($AE = ED$), $EF \parallel AB \parallel CD$ ($F \in BC$) thì F là trung điểm BC ($BF = FC$).

Ví dụ: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E là trung điểm của AD. Qua E kẻ đường thẳng song song với CD, cắt BC tại F. Biết $BC = 12$ cm. Tính BF.

Giải:

Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), ta có:

- E là trung điểm của AD (giả thiết)
- $EF \parallel CD$ (giả thiết), mà $AB \parallel CD$ nên $EF \parallel AB \parallel CD$.

Suy ra F là trung điểm của cạnh bên BC (theo Định lý 3).

Do đó, $BF = FC = BC / 2 = 12 / 2 = 6$ cm.

Vậy $BF = 6$ cm.

Định lý 4 (Tính chất đường trung bình của hình thang)

Phát biểu: Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa tổng độ dài hai đáy.

Tóm tắt: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), EF là đường trung bình:

Nếu E là trung điểm AD ($AE = ED$) và F là trung điểm BC ($BF = FC$) thì $EF \parallel AB \parallel CD$ và $EF = (AB + CD) / 2$.

Ví dụ 1: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 6$ cm, $CD = 14$ cm. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính độ dài đường trung bình EF.

Giải:

Xét hình thang ABCD, ta có:

- E là trung điểm của AD (giả thiết)

- F là trung điểm của BC (giả thiết)

Suy ra EF là đường trung bình của hình thang ABCD.

Theo Định lý 4, ta có: $EF = (AB + CD) / 2 = (6 + 14) / 2 = 20 / 2 = 10 \text{ cm}$.

Vậy $EF = 10 \text{ cm}$.

Ví dụ 2: Một mảnh vườn hình thang có hai đáy lần lượt là 20m và 30m. Người ta làm một lối đi là đường trung bình của mảnh vườn đó. Tính chiều dài của lối đi.

Giải:

Gọi mảnh vườn là hình thang ABCD với hai đáy $AB = 20\text{m}$ và $CD = 30\text{m}$.

Lối đi là đường trung bình EF của hình thang.

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung bình của hình thang, ta có:

$$EF = (AB + CD) / 2 = (20 + 30) / 2 = 50 / 2 = 25\text{m}.$$

Vậy chiều dài của lối đi là 25m.

C. Các dạng bài tập vận dụng

Dạng 1: Chứng minh các quan hệ song song, bằng nhau

Phương pháp: Sử dụng các định lý về đường trung bình để suy ra các yếu tố song song hoặc bằng nhau. Ví dụ, để chứng minh $MN \parallel BC$, ta chứng minh MN là đường trung bình của tam giác ABC. Để chứng minh $AN = NC$, ta chứng minh đường thẳng qua M song song với BC cắt AC tại N, với M là trung điểm AB.

Ví dụ: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA.

Chứng minh rằng tứ giác ADEF là hình bình hành.

Giải:

Xét tam giác ABC, ta có:

- D là trung điểm của AB, F là trung điểm của AC. Suy ra DF là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó, $DF \parallel BC$ và $DF = \frac{1}{2} BC$.
- D là trung điểm của AB, E là trung điểm của BC. Suy ra DE là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó, $DE \parallel AC$ và $DE = \frac{1}{2} AC$.
- E là trung điểm của BC, F là trung điểm của AC. Suy ra EF là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó, $EF \parallel AB$ và $EF = \frac{1}{2} AB$.

Để chứng minh ADEF là hình bình hành, ta cần chứng minh một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Xét tứ giác ADEF:

- Ta có $DE \parallel AC$ (chứng minh trên), mà F thuộc AC nên $DE \parallel AF$.
- Ta có $DF \parallel BC$ (chứng minh trên), mà E thuộc BC nên $DF \parallel BE$.
- Ta có $EF \parallel AB$ (chứng minh trên), mà D thuộc AB nên $EF \parallel AD$.

Từ $EF \parallel AD$ và $DE \parallel AF$, suy ra tứ giác ADEF là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

Dạng 2: Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp: Áp dụng trực tiếp các công thức $MN = 1/2 BC$ (đối với tam giác) và $EF = (AB + CD) / 2$ (đối với hình thang) để tính toán độ dài các cạnh chưa biết.

Ví dụ: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB = CD$). Kẻ các đường cao AH, BK. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết $MN = 20$ cm, $HK = 8$ cm. Tính độ dài hai đáy AB và CD.

Giải:

Vì M, N là trung điểm của AD, BC nên MN là đường trung bình của hình thang ABCD.

Suy ra: $MN = (AB + CD) / 2 = 20$ cm $\Rightarrow AB + CD = 40$ cm (1).

Xét hình thang ABKH có $AH \parallel BK$ (cùng vuông góc với CD) và $AB \parallel HK$ (vì $AB \parallel CD$), nên ABKH là hình chữ nhật. Suy ra $AB = HK = 8$ cm.

Thay $AB = 8$ cm vào (1), ta có:

$8 + CD = 40 \Rightarrow CD = 32$ cm.

Vậy độ dài hai đáy là $AB = 8$ cm và $CD = 32$ cm.

Dạng 3: Bài toán thực tế

Phương pháp: Mô hình hóa bài toán thực tế thành bài toán hình học sử dụng tam giác hoặc hình thang. Sau đó áp dụng tính chất đường trung bình để giải quyết.

Ví dụ: Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B ở hai bên một hồ nước, người ta chọn một điểm C trên bờ, đo khoảng cách $CA = 50\text{m}$, $CB = 60\text{m}$. Sau đó, xác định các trung điểm D của CA và E của CB. Đo khoảng cách giữa D và E được 25m . Hỏi khoảng cách giữa A và B là bao nhiêu?

Giải:

Xét tam giác ABC, ta có:

- D là trung điểm của CA (giả thiết)
- E là trung điểm của CB (giả thiết)

Suy ra DE là đường trung bình của tam giác ABC.

Theo tính chất đường trung bình, ta có: $DE = \frac{1}{2} AB$.

Suy ra $AB = 2 * DE = 2 * 25 = 50\text{m}$.

Vậy khoảng cách giữa hai điểm A và B là 50m .