

Tổng hợp kiến thức: Góc giữa hai đường thẳng trong không gian (Phương pháp Vector)

Phương pháp vector là một công cụ mạnh mẽ để giải quyết các bài toán hình học không gian, đặc biệt là bài toán tính góc. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức liên quan đến việc xác định góc giữa hai đường thẳng bằng cách sử dụng vector.

I. Kiến thức nền tảng cần nhớ

Trước khi đi vào nội dung chính, chúng ta cần ôn lại một số khái niệm và công thức cơ bản về vector trong không gian.

1. Vector chỉ phương (VTCP) của đường thẳng

Định nghĩa: Vector $\vec{u}$ (khác $\vec{0}$) được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song hoặc trùng với đường thẳng d .

- Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của d thì $k \cdot \vec{u}$ (với $k \neq 0$) cũng là một VTCP của d . Do đó, một đường thẳng có vô số VTCP.
- Nếu đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B, thì $\vec{AB}$ là một VTCP của d .

2. Tích vô hướng của hai vector

Tích vô hướng là một phép toán quan trọng liên quan đến góc.

- Công thức định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, trong đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Công thức tọa độ (trong hệ Oxyz): Cho $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ và $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Khi đó: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

3. Góc giữa hai vector

Từ công thức tích vô hướng, ta suy ra công thức tính cosin của góc giữa hai vector:

Công thức: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) / (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|)$

Lưu ý: Góc giữa hai vector có thể là góc tù (từ 0° đến 180°).

II. Định nghĩa và Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 trong không gian là góc giữa hai đường thẳng d_1' và d_2' cùng đi qua một điểm O bất kỳ và lần lượt song song (hoặc trùng) với d_1 và d_2 .

Tính chất quan trọng: Góc giữa hai đường thẳng, ký hiệu là (d_1, d_2) , luôn là góc không tù. Tức là: $0^\circ \leq (d_1, d_2) \leq 90^\circ$.

2. Công thức tính góc bằng phương pháp vector

Đây là phần cốt lõi của chuyên đề. Mối liên hệ giữa góc của hai đường thẳng và góc của hai VTCP tương ứng được thể hiện qua công thức sau:

Gọi d_1 và d_2 là hai đường thẳng có VTCP lần lượt là $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 , d_2 .

Công thức: $\cos(\varphi) = |\cos(\vec{u_1}, \vec{u_2})| = (|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|) / (|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|)$

Giải thích:

- Việc lấy giá trị tuyệt đối $|\cos(\vec{u_1}, \vec{u_2})|$ đảm bảo rằng giá trị cosin của góc φ luôn không âm.
- Điều này phù hợp với định nghĩa góc giữa hai đường thẳng φ luôn nằm trong khoảng $[0^\circ, 90^\circ]$.

III. Phương pháp giải toán tổng quát

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng phương pháp vector, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Bước 1: Tìm Vector chỉ phương (VTCP)

- Xác định VTCP $\vec{u_1}$ của đường thẳng d_1 .
- Xác định VTCP $\vec{u_2}$ của đường thẳng d_2 .
- Để bài toán đơn giản, thường ta sẽ gán một hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp vào hình vẽ để xác định tọa độ các điểm và từ đó suy ra tọa độ VTCP.

2. Bước 2: Tính toán các giá trị

- Tính tích vô hướng: $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}$.
- Tính độ dài mỗi vector: $|\vec{u_1}|$ và $|\vec{u_2}|$.

3. Bước 3: Áp dụng công thức

- Thay các giá trị vừa tính vào công thức: $\cos(d1, d2) = \frac{|\text{vec}(\mathbf{u1}) \cdot \text{vec}(\mathbf{u2})|}{(|\text{vec}(\mathbf{u1})| \cdot |\text{vec}(\mathbf{u2})|)}$.

4. Bước 4: Kết luận

- Từ giá trị $\cos(d1, d2)$ vừa tìm được, sử dụng máy tính bỏ túi (hàm $\arccos$ hoặc SHIFT COS) để tìm ra số đo của góc.

IV. Ví dụ minh họa chi tiết

Ví dụ 1: Góc giữa hai đường chéo trong hình lập phương

Bài toán: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a . Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'.

Lời giải:

1. Bước 1: Gắn hệ trục tọa độ và tìm VTCP

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc tại A, trục Ox trùng với AB, Oy trùng với AD, Oz trùng với AA'.
- Tọa độ các đỉnh liên quan: A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(a, a, 0), B'(a, 0, a), C'(a, a, a).
- VTCP của đường thẳng AB' là $\text{vec}(\mathbf{AB'}) = (a-0, 0-0, a-0) = (a, 0, a)$.
- VTCP của đường thẳng BC' là $\text{vec}(\mathbf{BC'}) = (a-a, a-0, a-0) = (0, a, a)$.

2. Bước 2: Tính toán

- Tích vô hướng: $\vec{AB'} \cdot \vec{BC'} = a \cdot 0 + 0 \cdot a + a \cdot a = a^2$.
- Độ dài vector: $|\vec{AB'}| = \sqrt{a^2 + 0^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.
- Độ dài vector: $|\vec{BC'}| = \sqrt{0^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

3. Bước 3: Áp dụng công thức

- $\cos(\angle AB', BC') = \frac{a^2}{(a\sqrt{2}) \cdot (a\sqrt{2})} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$.

4. Bước 4: Kết luận

- Vì $\cos(\angle AB', BC') = \frac{1}{2}$ nên góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' là 60° .

Ví dụ 2: Góc giữa hai cạnh đối trong tứ diện đều

Bài toán: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a . Chứng minh rằng hai cạnh đối AB và CD vuông góc với nhau.

Lời giải:

1. Bước 1: Tìm VTCP (không cần tọa độ)

- Chọn VTCP của AB là $\vec{u_1} = \vec{AB}$.
- Chọn VTCP của CD là $\vec{u_2} = \vec{CD}$.
- Để tính tích vô hướng, ta biểu diễn $\vec{CD}$ qua các vector có chung gốc A: $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC}$.

2. Bước 2: Tính tích vô hướng

- $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- Vì ABCD là tứ diện đều cạnh a, các mặt là tam giác đều. Do đó, góc giữa hai vector cạnh bất kỳ xuất phát từ một đỉnh là 60° .
- $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos(\angle BAD) = a \cdot a \cdot \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\angle BAC) = a \cdot a \cdot \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$.
- Suy ra: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$.

3. Bước 3 & 4: Kết luận

- Vì tích vô hướng của hai VTCP bằng 0 nên $\cos(\angle \text{AB, CD}) = 0$.
- Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 90° , tức là chúng vuông góc với nhau.

Ví dụ 3: Góc trong hình chóp

Bài toán: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 'a', SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải:

Nhận xét: Vì $CD \parallel AB$ nên góc giữa SB và CD chính là góc giữa SB và AB, tức là góc SBA.

Tuy nhiên, ta sẽ giải bằng phương pháp vector để luyện tập.

1. Bước 1: Gắn hệ trục tọa độ và tìm VTCP

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc tại A, trục Ox trùng với AB, Oy trùng với AD, Oz trùng với AS.
- Tọa độ các đỉnh: A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), D(0, a, 0), C(a, a, 0), S(0, 0, a*sqrt(3)).
- VTCP của đường thẳng SB là $\vec{SB} = (a-0, 0-0, 0-a*\sqrt{3}) = (a, 0, -a*\sqrt{3})$.
- VTCP của đường thẳng CD là $\vec{CD} = (0-a, a-a, 0-0) = (-a, 0, 0)$.
(Hoặc có thể chọn VTCP đơn giản hơn là (1, 0, 0) vì CD // AB // Ox).

2. Bước 2: Tính toán

- Tích vô hướng: $\vec{SB} \cdot \vec{CD} = a*(-a) + 0*0 + (-a*\sqrt{3})*0 = -a^2$.
- Độ dài vector: $|\vec{SB}| = \sqrt{a^2 + 0^2 + (-a*\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.
- Độ dài vector: $|\vec{CD}| = \sqrt{(-a)^2 + 0^2 + 0^2} = a$.

3. Bước 3: Áp dụng công thức

- $\cos(\angle SB, CD) = |-a^2| / (2a * a) = a^2 / (2a^2) = 1/2$.

4. Bước 4: Kết luận

- Góc giữa hai đường thẳng SB và CD là **60°**.

V. Một số lưu ý quan trọng

- **Phân biệt góc giữa vector và góc giữa đường thẳng:** Luôn nhớ rằng góc giữa hai đường thẳng không bao giờ là góc tù. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng có dấu giá trị tuyệt đối ở tử số chính là để đảm bảo điều này.
- **Chọn hệ trục tọa độ thông minh:** Việc chọn gốc tọa độ và các trục một cách khéo léo (thường gắn vào các đỉnh và cạnh vuông góc với nhau) sẽ làm cho việc xác định tọa độ trở nên cực kỳ đơn giản, giảm thiểu sai sót trong tính toán.
- **Trường hợp đặc biệt - Vuông góc:** Nếu tính ra tích vô hướng của hai VTCP bằng 0, ta có thể kết luận ngay hai đường thẳng đó vuông góc với nhau và góc giữa chúng bằng 90° mà không cần tính độ dài các vector.
- **Sử dụng tính chất song song:** Trong nhiều trường hợp, thay vì tính góc giữa d_1 và d_2 , ta có thể tìm một đường thẳng d_3 song song với d_2 và cắt d_1 . Khi đó $(d_1, d_2) = (d_1, d_3)$. Đây là phương pháp hình học thuần túy nhưng có thể kết hợp để kiểm tra lại kết quả của phương pháp vector.