

Tổng hợp kiến thức về Bất đẳng thức

Bunhiacopxki và Ứng dụng

Bất đẳng thức Bunhiacopxki (còn được biết đến với tên gọi Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) là một trong những bất đẳng thức quan trọng và có ứng dụng rộng rãi nhất trong chương trình toán học phổ thông, đặc biệt trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

1. Định nghĩa và Dạng tổng quát

Bất đẳng thức Bunhiacopxki phát biểu mối quan hệ giữa tích của tổng các bình phương và bình phương của tổng các tích.

Phát biểu

Cho hai bộ số thực tùy ý $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số tỉ lệ với nhau, tức là tồn tại số thực k sao cho $a_i = kb_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Hay nói cách khác:

$$a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$$

(Quy ước: nếu mẫu số $b_i = 0$ thì tử số tương ứng $a_i = 0$).

2. Các dạng thường gặp

Trong chương trình học, chúng ta thường gặp các trường hợp cụ thể của bất đẳng thức này.

a. Dạng cho hai bộ hai số ($n=2$)

Đây là dạng phổ biến nhất ở cấp THCS và lớp 10.

- **Công thức:** Với hai bộ số (a, b) và (x, y) , ta có: $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$
- **Giải thích:** Bình phương của tổng các tích không vượt quá tích của tổng các bình phương.
- **Dấu bằng xảy ra khi:** $a/x = b/y$ (với quy ước $x, y \neq 0$).

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, x, y , ta luôn có $(3x + 4y)^2 \leq 25(x^2 + y^2)$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(3, 4)$ và (x, y) , ta có:

$$(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = (9 + 16)(x^2 + y^2) = 25(x^2 + y^2).$$

Đây là điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $x/3 = y/4$.

Ví dụ 2: Cho x, y là các số thực. Chứng minh rằng $3x + 2y \leq \sqrt{13}$ nếu $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(3, 2)$ và (x, y) , ta có:

$$(3x + 2y)^2 \leq (3^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = (9 + 4)(x^2 + y^2) = 13(x^2 + y^2).$$

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên $(3x + 2y)^2 \leq 13 * 1 = 13$.

Khai căn hai vế, ta được: $-\sqrt{13} \leq 3x + 2y \leq \sqrt{13}$.

Vậy $3x + 2y \leq \sqrt{13}$. Dấu "=" xảy ra khi $x/3 = y/2 > 0$ và $x^2 + y^2 = 1$, giải ra ta được $x = 3/\sqrt{13}$ và $y = 2/\sqrt{13}$.

b. Dạng cho hai bộ ba số (n=3)

Mở rộng cho không gian ba chiều, dạng này cũng rất hay gặp.

- **Công thức:** Với hai bộ số (a, b, c) và (x, y, z) , ta có: $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$
- **Dấu bằng xảy ra khi:** $a/x = b/y = c/z$ (với quy ước mẫu khác 0).

Ví dụ: Cho các số thực x, y, z . Chứng minh rằng $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14(x^2 + y^2 + z^2)$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(1, 2, 3)$ và (x, y, z) , ta có:

$$(1*x + 2*y + 3*z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (1 + 4 + 9)(x^2 + y^2 + z^2) = 14(x^2 + y^2 + z^2).$$

Đây là điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $x/1 = y/2 = z/3$.

c. Dạng Engel (Dạng cộng mẫu)

Đây là một hệ quả trực tiếp và rất mạnh của Bất đẳng thức Bunhiacopxki, thường được dùng để tìm giá trị nhỏ nhất.

- **Công thức:** Cho bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và bộ số dương $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ta có:

$$a_1^2/x_1 + a_2^2/x_2 + \dots + a_n^2/x_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 / (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

- **Dấu bằng xảy ra khi:** $a_1/x_1 = a_2/x_2 = \dots = a_n/x_n$.

3. Ứng dụng tìm Giá trị lớn nhất (GTLN)

Đây là một trong những ứng dụng quan trọng nhất của Bất đẳng thức Bunhiacopxki. Nguyên tắc chung là biến đổi biểu thức cần tìm GTLN về dạng vế trái của bất đẳng thức.

Phương pháp chung

Để tìm GTLN của biểu thức $P = ax + by$ khi biết điều kiện $x^2 + y^2 = C$ (C là hằng số dương), ta thực hiện các bước sau:

1. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho hai bộ số (a, b) và (x, y) :

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

2. Thay P và điều kiện đã cho vào bất đẳng thức:

$$P^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot C$$

3. Từ đó suy ra khoảng giá trị của P :

$$-\sqrt{(a^2 + b^2) \cdot C} \leq P \leq \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot C}$$

4. Kết luận GTLN của P là $\sqrt{(a^2 + b^2) \cdot C}$.

5. Tìm giá trị của x, y để dấu "=" xảy ra bằng cách giải hệ phương trình gồm điều kiện dấu bằng ($a/x = b/y$) và điều kiện ban đầu ($x^2 + y^2 = C$).

Ví dụ minh họa chi tiết

Ví dụ 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(1, 3)$ và (x, y) , ta có:

$$(1 \cdot x + 3 \cdot y)^2 \leq (1^2 + 3^2)(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq (1 + 9)(x^2 + y^2)$$

Thay điều kiện $x^2 + y^2 = 4$ vào, ta được:

$$P^2 \leq 10 \cdot 4 = 40$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{40} \leq P \leq \sqrt{40}$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{10} \leq P \leq 2\sqrt{10}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2\sqrt{10}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x/1 = y/3$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Từ $x/1 = y/3 \Rightarrow y = 3x$. Thay vào phương trình còn lại:

$$x^2 + (3x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 = 4 \Leftrightarrow 10x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2/5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{(2/5)}.$$

Để $P = x + 3y$ đạt GTLN (dương), x và y phải cùng dấu. Do đó ta chọn $x = \sqrt{(2/5)} = \sqrt{10}/5$. Khi đó $y = 3\sqrt{10}/5$.

Vậy GTLN của P là $2\sqrt{10}$, đạt được khi $x = \sqrt{10}/5$ và $y = 3\sqrt{10}/5$.

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Lời giải:

Ta có $Q = 1\sqrt{a} + 1\sqrt{b}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(1, 1)$ và $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$:

$$(1\sqrt{a} + 1\sqrt{b})^2 \leq (1^2 + 1^2)((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2)$$

$$\Leftrightarrow Q^2 \leq (1 + 1)(a + b)$$

Thay điều kiện $a + b = 2$ vào, ta được:

$$Q^2 \leq 2 * 2 = 4$$

Vì a, b dương nên $Q > 0$. Do đó, ta có $Q \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 2.

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{a}/1 = \sqrt{b}/1$ và $a + b = 2$.

$\Rightarrow a = b$. Kết hợp với $a + b = 2$, ta được $a = b = 1$.

Vậy GTLN của Q là 2, đạt được khi $a = b = 1$.

Ví dụ 3: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x + 2y + 3z$.

Lời giải:

Để áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta cần biến đổi biểu thức F và điều kiện về dạng tương ứng.

Ta viết lại F như sau: $F = 1x + \sqrt{2}(\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ và $(x, \sqrt{2}y, \sqrt{3}z)$:

$$(1x + \sqrt{2}(\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z))^2 \leq (1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2)(x^2 + (\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2)$$

$$\Leftrightarrow F^2 \leq (1 + 2 + 3)(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

Thay điều kiện $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ vào, ta được:

$$F^2 \leq 6 * 6 = 36$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq F \leq 6$$

Vậy giá trị lớn nhất của F là 6.

Dấu "=" xảy ra khi $x/1 = (\sqrt{2}y)/\sqrt{2} = (\sqrt{3}z)/\sqrt{3}$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.

$\Rightarrow x = y = z$. Thay vào điều kiện ban đầu:

$$x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 6 \Leftrightarrow 6x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Để $F = x + 2y + 3z = 6x$ đạt GTLN, ta chọn $x = 1$. Khi đó $y = 1, z = 1$.

Vậy GTLN của F là 6, đạt được khi $x = y = z = 1$.

4. Lưu ý quan trọng khi áp dụng

- **Kiểm tra dấu bằng:** Luôn phải kiểm tra xem dấu bằng có thể xảy ra hay không. GTLN/GTNN chỉ tồn tại khi có các giá trị cụ thể của biến để dấu bằng xảy ra.
- **Lựa chọn bộ số hợp lý:** Việc chọn các bộ số $(a, b, c, \dots)$ và $(x, y, z, \dots)$ là mấu chốt của bài toán. Thường thì một bộ số sẽ là hằng số được chọn để khớp với biểu thức cần tìm GTLN, bộ còn lại chứa các biến.
- **Phân biệt với BĐT AM-GM (Cauchy):** BĐT Bunhiacopxki áp dụng cho các số thực bất kỳ, trong khi BĐT AM-GM thường áp dụng cho các số không âm. Đây là một lợi thế lớn của Bunhiacopxki.