

# Tổng hợp kiến thức: Ứng dụng tích phân tính thể tích khối tròn xoay quanh trục Oy

Khi một hình phẳng quay xung quanh một trục trong mặt phẳng, nó sẽ tạo ra một vật thể tròn xoay. Tích phân là công cụ mạnh mẽ để tính chính xác thể tích của những vật thể này. Bài viết này tập trung vào các phương pháp tính thể tích khi hình phẳng quay quanh trục tung Oy.

## I. Phương pháp đĩa (Phương pháp cắt lát) - Chương trình cơ bản

Đây là phương pháp phổ biến nhất trong chương trình THPT. Ý tưởng của phương pháp này là chia khối tròn xoay thành nhiều "đĩa" hình trụ mỏng xếp chồng lên nhau theo trục Oy. Thể tích của khối tròn xoay bằng tổng thể tích của các đĩa đó.

### 1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong $x = g(y)$ , trục Oy, và hai đường thẳng $y = c, y = d$

Khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số  $x = g(y)$ , trục Oy ( $x=0$ ), và hai đường thẳng  $y = c, y = d$  (với  $c < d$ ) quay xung quanh trục Oy, ta được một khối tròn xoay.

- Công thức:  $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$

- Giải thích:

- Mỗi lát cắt vuông góc với trục Oy tại điểm có tung độ y là một hình tròn có bán kính  $R = |g(y)|$ .
- Diện tích của lát cắt này là  $S(y) = \pi R^2 = \pi[g(y)]^2$ .
- Thể tích của khối tròn xoay được tính bằng cách lấy tích phân của diện tích  $S(y)$  theo biến y từ c đến d.

### Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $x = \sqrt{y}$ , trục Oy, và hai đường thẳng  $y = 1$ ,  $y = 4$  quanh trục Oy.

*Phân tích:*

- Đường cong:  $x = g(y) = \sqrt{y}$
- Cận dưới:  $c = 1$
- Cận trên:  $d = 4$

*Giải:*

Áp dụng công thức, ta có thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_1^4 y dy$$

$$V = \pi [y^2/2] \Big|_1^4 = \pi (4^2/2 - 1^2/2) = \pi (16/2 - 1/2) = \pi (15/2) = 7.5\pi \text{ (đvtt)}$$

**Ví dụ 2:** Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng  $y = 2$  quanh trục Oy.

*Phân tích:*

- Từ  $y = x^2$ , ta suy ra  $x = \pm\sqrt{y}$ . Vì hình phẳng đối xứng qua Oy, ta chỉ cần xét nhánh  $x = \sqrt{y}$  (với  $x \geq 0$ ) rồi quay quanh Oy.
- Hình phẳng giới hạn bởi  $x = \sqrt{y}$ , trục Oy ( $x=0$ ),  $y = 0$  và  $y = 2$ .
- Cận dưới:  $c = 0$
- Cận trên:  $d = 2$

*Giải:*

Áp dụng công thức, ta có:

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^2 y dy$$

$$V = \pi [y^2/2] \Big|_0^2 = \pi (2^2/2 - 0^2/2) = 2\pi \text{ (đvtt)}$$

## 2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $x = g_1(y)$ , $x = g_2(y)$ và hai đường thẳng $y = c$ , $y = d$

Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  $x = g_1(y)$ ,  $x = g_2(y)$  (giả sử  $0 \leq g_1(y) \leq g_2(y)$  trên  $[c, d]$ ) và hai đường thẳng  $y = c$ ,  $y = d$ . Khi quay (H) quanh trục Oy, ta được một khối tròn xoay có phần rỗng ở giữa.

- **Công thức:**  $V = \pi \int_c^d ([g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2) dy$
- **Giải thích:**
  - Phương pháp này còn gọi là phương pháp "vòng đệm" (washer method).
  - Mỗi lát cắt vuông góc với trục Oy tại  $y$  là một hình vành khăn.
  - Bán kính vòng tròn lớn là  $R = g_2(y)$ , bán kính vòng tròn nhỏ là  $r = g_1(y)$ .
  - Diện tích hình vành khăn là  $S(y) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi([g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2)$ .

- Lấy tích phân của diện tích này từ c đến d ta được thể tích cần tìm.

### Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng giới hạn bởi hai đường  $x = y^2$  và  $x = 2 - y^2$  quay quanh trục Oy.

*Phân tích:*

- Tìm giao điểm:  $y^2 = 2 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ . Vậy cận tích phân là  $c = -1, d = 1$ .
- Trên  $[-1, 1]$ , ta có  $y^2 \leq 1$ , do đó  $2 - y^2 \geq 1$ . Vậy  $g_2(y) = 2 - y^2$  và  $g_1(y) = y^2$ .

*Giải:*

Áp dụng công thức, ta có:

$$V = \pi \int_{-1}^1 [(2 - y^2)^2 - (y^2)^2] dy$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4y^2 + y^4 - y^4) dy = \pi \int_{-1}^1 (4 - 4y^2) dy$$

$$V = \pi [4y - 4y^3/3] \Big|_{-1}^1 = \pi [(4 - 4/3) - (-4 + 4/3)] = \pi [8/3 - (-8/3)] = 16\pi/3 \text{ (đvtt)}$$

## II. Phương pháp vỏ trụ (Phương pháp nâng cao)

Phương pháp này đặc biệt hữu ích khi hình phẳng được cho bởi hàm  $y = f(x)$  và quay quanh trục Oy, vì ta không cần phải biểu diễn x theo y.

## 1. Hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ , trục $Ox$ , và hai đường thẳng $x = a$ , $x = b$

Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ), trục  $Ox$  ( $y=0$ ), và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  (với  $0 \leq a < b$ ). Khi quay hình phẳng này quanh trục  $Oy$ , ta tạo ra một khối tròn xoay.

- Công thức:  $V = 2\pi \int_a^b x * f(x) dx$

- Giải thích:

- Ta chia khối tròn xoay thành các "vỏ trụ" mỏng đồng tâm.
- Mỗi vỏ trụ có bán kính  $x$ , chiều cao  $f(x)$  và độ dày  $dx$ .
- Diện tích xung quanh của vỏ trụ là  $2\pi x * f(x)$ .
- Thể tích của vỏ trụ là  $dV = 2\pi x * f(x) dx$ .
- Lấy tích phân từ  $a$  đến  $b$  ta được tổng thể tích.

### Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Sử dụng phương pháp vỏ trụ để tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi  $y = 2x^2 - x^3$ , trục  $Ox$  quanh trục  $Oy$ .

Phân tích:

- Tìm giao điểm với trục  $Ox$ :  $2x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = 2$ .
- Cận tích phân là  $a = 0$ ,  $b = 2$ .
- Hàm số  $f(x) = 2x^2 - x^3$ .

Giải:

Áp dụng công thức vỏ trụ:

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) \, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4) \, dx$$

$$V = 2\pi [2x^4/4 - x^5/5] \Big|_0^2 = 2\pi [x^4/2 - x^5/5] \Big|_0^2$$

$$V = 2\pi [(2^4/2 - 2^5/5) - 0] = 2\pi (16/2 - 32/5) = 2\pi (8 - 32/5) = 2\pi (40/5 - 32/5) = 16\pi/5 \text{ (đvtt)}$$

### III. Bảng so sánh tính thể tích quay quanh Ox và Oy

| Tiêu chí                        | Quay quanh trục Ox                                 | Quay quanh trục Oy<br>(Phương pháp đĩa)            |
|---------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Biến của hàm số và tích phân    | $y = f(x)$ , tích phân theo biến <b>x</b>          | $x = g(y)$ , tích phân theo biến <b>y</b>          |
| Công thức cơ bản (1 đường cong) | $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$                  | $V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$                  |
| Công thức (2 đường cong)        | $V = \pi \int_a^b  [f_1(x)]^2 - [f_2(x)]^2  \, dx$ | $V = \pi \int_c^d  [g_1(y)]^2 - [g_2(y)]^2  \, dy$ |
| Bán kính lát cắt                | $R =  f(x) $                                       | $R =  g(y) $                                       |

### IV. Các bước giải bài toán

- Phân tích bài toán:** Xác định rõ hình phẳng được giới hạn bởi những đường nào.

2. **Vẽ hình (khuyến khích):** Vẽ hình phẳng giúp hình dung rõ hơn về vật thể và xác định cận tích phân.
3. **Xác định trục quay:** Bài toán yêu cầu quay quanh trục Oy.
4. **Chọn phương pháp:**
  - Nếu các đường cong dễ dàng biểu diễn dưới dạng  $x = g(y)$ , hãy dùng **phương pháp đĩa**. Đây là phương pháp cơ bản.
  - Nếu các đường cong được cho dưới dạng  $y = f(x)$  và việc chuyển sang  $x = g(y)$  khó khăn, hãy cân nhắc **phương pháp vỏ trụ**.
5. **Thiết lập tích phân:**
  - Xác định các cận tích phân (c, d) trên trục Oy (phương pháp đĩa) hoặc (a, b) trên trục Ox (phương pháp vỏ trụ).
  - Lắp đúng công thức đã chọn.
6. **Tính tích phân và kết luận:** Thực hiện phép tính tích phân để tìm ra thể tích và ghi đơn vị (đvtt - đơn vị thể tích).