

Tổng hợp kiến thức: Tích của một số với một vectơ và Điều kiện hai vectơ cùng phương

I. Tích của một số với một vectơ

1. Định nghĩa

Phép nhân một số thực với một vectơ cho kết quả là một vectơ mới có sự thay đổi về độ dài và có thể cả về hướng.

Định nghĩa: Cho một số thực $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- **Về hướng:**

- Vectơ $k\vec{a}$ **cùng hướng** với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- Vectơ $k\vec{a}$ **ngược hướng** với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

- **Về độ dài (mô-đun):** Độ dài của vectơ $k\vec{a}$ bằng tích của giá trị tuyệt đối của k với độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Công thức: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

Quy ước:

- Nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$ thì $k\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 1: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng 5. Gọi I là trung điểm của AB.

- Vectơ $2\overline{AB}$ là một vectơ cùng hướng với $\overline{AB}$ và có độ dài $|2\overline{AB}| = |2| \cdot |\overline{AB}| = 2 \cdot 5 = 10$.
- Vectơ $-3\overline{IA}$ là một vectơ ngược hướng với $\overline{IA}$ (tức là cùng hướng với $\overline{IB}$) và có độ dài $|-3\overline{IA}| = |-3| \cdot |\overline{IA}| = 3 \cdot (5/2) = 7.5$.

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính độ dài của vectơ $\overline{u} = 4\overline{AC}$.

Giải:

Đường chéo AC của hình vuông có độ dài là $a\sqrt{2}$.

Theo công thức, ta có: $|\overline{u}| = |4\overline{AC}| = |4| \cdot |\overline{AC}| = 4 \cdot (a\sqrt{2}) = 4a\sqrt{2}$.

2. Các tính chất của phép nhân một số với một vectơ

Với hai vectơ bất kì $\overline{a}$, $\overline{b}$ và hai số thực bất kì k , m , ta luôn có các tính chất sau:

1. Tính chất kết hợp:

$$k(m\overline{a}) = (km)\overline{a}$$

$$\text{Ví dụ: } 2(3\overline{AB}) = (2 \cdot 3)\overline{AB} = 6\overline{AB}.$$

2. Tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ:

$$k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$$

$$\text{Ví dụ: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC. Ta có } \overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AM}.$$

$$\text{Nhân 2 vế với 3, ta được: } 3(\overline{AB} + \overline{AC}) = 3(2\overline{AM}) \text{ hay } 3\overline{AB} + 3\overline{AC} = 6\overline{AM}.$$

3. Tính chất phân phối đối với phép cộng các số:

$$(k + m)\overline{a} = k\overline{a} + m\overline{a}$$

$$\text{Ví dụ: } 5\overline{CD} = (2 + 3)\overline{CD} = 2\overline{CD} + 3\overline{CD}.$$

4. Tính chất liên quan đến số 1 và -1:

$$1\overline{a} = \overline{a}$$

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a} \text{ (vectơ đối của } \vec{a}\text{)}$$

II. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

1. Định lí

Mối quan hệ giữa hai vectơ cùng phương được thể hiện qua phép nhân một số với một vectơ. Đây là một trong những định lí quan trọng nhất của hình học vectơ.

Định lí: Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (với $\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Hệ quả: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

Ví dụ 1: Cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -4)$ và $\vec{v} = (-1; 2)$. Chứng tỏ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Giải:

Ta thấy hoành độ của $\vec{u}$ là 2, hoành độ của $\vec{v}$ là -1. Tỉ số là $2 / (-1) = -2$.

Tung độ của $\vec{u}$ là -4, tung độ của $\vec{v}$ là 2. Tỉ số là $(-4) / 2 = -2$.

Vì các tỉ số bằng nhau (cùng bằng -2), nên ta có $\vec{u} = -2\vec{v}$. Vậy $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Ví dụ 2: Cho ba điểm A(1; 1), B(2; 3), C(4; 7). Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải:

Để chứng minh A, B, C thẳng hàng, ta cần chứng minh hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ cùng phương.

1. Tính tọa độ các vectơ:

- $\overrightarrow{AB} = (2-1; 3-1) = (1; 2)$
- $\overrightarrow{AC} = (4-1; 7-1) = (3; 6)$

2. Kiểm tra mối quan hệ:

Ta thấy $\overrightarrow{AC} = (3; 6) = 3 * (1; 2) = 3\overrightarrow{AB}$.

Vì $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

III. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

1. Định lí

Trong mặt phẳng, nếu ta có hai vectơ không cùng phương, chúng có thể đóng vai trò như một "hệ tọa độ" để biểu diễn bất kỳ vectơ nào khác trong mặt phẳng đó.

Định lí: Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó, mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể phân tích (biểu thị) một cách **duy nhất** theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là tồn tại duy nhất một cặp số thực (h, k) sao cho:

$$\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$$

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Giải:

Gọi M là trung điểm của BC.

1. Theo quy tắc trung điểm, ta có: $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AM}$. Suy ra $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

2. Theo tính chất trọng tâm, G nằm trên trung tuyến AM và $AG = \frac{2}{3}AM$. Do đó, $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$.

3. Thay (1) vào (2), ta được: $\overline{AG} = \frac{2}{3} * [\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})] = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$.

Vậy vectơ $\overline{AG}$ được phân tích thành $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD. Gọi I là trung điểm của CD. Hãy phân tích vectơ $\overline{BI}$ theo hai vectơ $\overline{BA}$ và $\overline{BC}$.

Giải:

Ta cần biểu diễn $\overline{BI}$. Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có thể viết:

$$\overline{BI} = \overline{BC} + \overline{CI}$$

Vì I là trung điểm của CD, nên $\overline{CI} = \frac{1}{2}\overline{CD}$.

Trong hình bình hành ABCD, ta có $\overline{CD} = \overline{BA}$.

Thay vào biểu thức trên, ta được:

$$\overline{BI} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{BA}.$$

Vậy vectơ $\overline{BI}$ được phân tích thành $\overline{BI} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \overline{BC}$.