

Chuyên đề: Sự xác định đường tròn và Tính chất đối xứng của đường tròn

Đây là tài liệu tổng hợp toàn bộ kiến thức lý thuyết và các dạng bài tập ví dụ cơ bản trong chuyên đề đầu tiên của chương trình Hình học 9, giúp học sinh nắm vững nền tảng về đường tròn.

PHẦN I: SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

1. Nhắc lại về đường tròn

a. Định nghĩa

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

- Ký hiệu: **(O; R)** hoặc **(O)**.
- Công thức: Một điểm M thuộc đường tròn (O; R) khi và chỉ khi **OM = R**.

Ví dụ 1: Cho điểm O cố định. Có bao nhiêu đường tròn tâm O bán kính 5cm?

Giải: Với tâm O và bán kính $R=5\text{cm}$ đã xác định, chỉ có một và chỉ một đường tròn thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(3; 4). Điểm A có thuộc đường tròn tâm O(0;0) bán kính $R = 5$ không?

Giải: Ta tính khoảng cách OA. Áp dụng định lý Pytago, ta có: $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Vì $OA = 5 = R$, vậy điểm A thuộc đường tròn (O; 5).

b. Vị trí của một điểm đối với đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và điểm M bất kỳ. Có ba vị trí có thể xảy ra:

Vị trí của điểm M	Hệ thức	Hình ảnh
Điểm M nằm bên trong đường tròn (O; R)	$OM < R$	M nằm giữa O và một điểm trên đường tròn.
Điểm M nằm trên đường tròn (O; R)	$OM = R$	M là một điểm của đường tròn.
Điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R)	$OM > R$	O nằm giữa M và một điểm trên đường tròn.

Ví dụ: Cho đường tròn (O; 6cm). Hãy xác định vị trí của các điểm A, B, C so với đường tròn, biết $OA = 5\text{cm}$, $OB = 6\text{cm}$, $OC = 8\text{cm}$.

Giải:

- Vì $OA = 5\text{cm} < R = 6\text{cm}$, nên điểm A nằm bên trong đường tròn (O).
- Vì $OB = 6\text{cm} = R$, nên điểm B nằm trên đường tròn (O).
- Vì $OC = 8\text{cm} > R = 6\text{cm}$, nên điểm C nằm bên ngoài đường tròn (O).

2. Cách xác định một đường tròn

Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của nó, hoặc khi biết một điều kiện đủ để tìm được tâm và bán kính.

a. Biết tâm và bán kính

Đây là cách cơ bản nhất. Nếu biết tâm O và bán kính R , ta hoàn toàn xác định được duy nhất một đường tròn.

b. Đường tròn đi qua các điểm cho trước

- **Qua 1 điểm:** Có vô số đường tròn đi qua một điểm A cho trước. Tâm của các đường tròn này có thể là bất kỳ điểm nào trong mặt phẳng.
- **Qua 2 điểm:** Có vô số đường tròn đi qua hai điểm A và B cho trước. Tâm của các đường tròn này nằm trên **đường trung trực của đoạn thẳng AB** .

Ví dụ: Cho hai điểm $A(1, 2)$ và $B(5, 2)$. Viết phương trình đường trung trực của AB , nơi tập hợp các tâm của đường tròn đi qua A và B .

Giải: Trung điểm của AB là $I((1+5)/2, (2+2)/2) = I(3, 2)$. Vectơ $AB = (4, 0)$. Đường trung trực của AB đi qua I và vuông góc với AB , nên có phương trình là $x = 3$.

c. Qua ba điểm không thẳng hàng

Định lý: Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

- **Tâm đường tròn:** Tâm O của đường tròn này là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác tạo bởi ba điểm đó.

- **Bán kính:** Bán kính R là khoảng cách từ tâm O đến một trong ba điểm đó.

Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác được gọi là **đường tròn ngoại tiếp** tam giác đó. Tam giác đó được gọi là **tam giác nội tiếp** đường tròn.

Lưu ý: Không thể vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Giải:

1. Vì tam giác ABC vuông tại A , tâm O của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của cạnh huyền BC .
2. Áp dụng định lý Pytago, ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm.
3. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp bằng một nửa cạnh huyền: $R = BC / 2 = 10 / 2 = 5$ cm.
4. Vậy tâm O là trung điểm của BC và bán kính $R = 5\text{cm}$.

PHẦN II: TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Tâm đối xứng

Định lý: Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn chính là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Giải thích: Nếu lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn (O) , thì điểm M' đối xứng với M qua tâm O cũng nằm trên đường tròn (O) .

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A trên đường tròn. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . Chứng minh rằng A' cũng thuộc đường tròn $(O; R)$.

Giải:

- Vì A' đối xứng với A qua O nên O là trung điểm của đoạn thẳng AA' .
- Do đó, ta có $OA' = OA$.
- Mà A thuộc đường tròn $(O; R)$ nên $OA = R$.
- Suy ra $OA' = R$. Điều này chứng tỏ điểm A' cũng thuộc đường tròn $(O; R)$.

2. Trục đối xứng

Định lý: Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kỳ đường kính nào cũng là một trục đối xứng của đường tròn.

Giải thích: Nếu lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn, thì điểm M' đối xứng với M qua một đường kính bất kỳ cũng nằm trên đường tròn đó.

Ví dụ: Cho đường tròn $(O; R)$ và đường kính AB . Lấy điểm C bất kỳ trên đường tròn (C không trùng A, B). Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường thẳng AB . Chứng minh rằng C' thuộc $(O; R)$.

Giải:

- Vì C' đối xứng với C qua đường thẳng AB nên AB là đường trung trực của đoạn thẳng CC' .
- Theo tính chất đường trung trực, mọi điểm trên đường trung trực đều cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
- Vì O nằm trên đường kính AB nên O cũng nằm trên đường trung trực của CC' .

- Do đó, ta có $OC' = OC$.
- Mà C thuộc đường tròn (O; R) nên $OC = R$.
- Suy ra $OC' = R$. Điều này chứng tỏ điểm C' cũng thuộc đường tròn (O; R).

3. Các định lý liên quan (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)

Các định lý này là hệ quả trực tiếp từ tính chất đối xứng qua đường kính.

a. Định lý 1: Đường kính vuông góc với dây cung

Phát biểu: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Tóm tắt: Cho (O; R), đường kính AB, dây CD. Nếu $AB \perp CD$ tại I thì $IC = ID$.

Ví dụ: Cho đường tròn (O; 13cm) và dây MN dài 24cm. Kẻ đường kính PQ vuông góc với MN tại H. Tính khoảng cách OH.

Giải:

1. Vì đường kính $PQ \perp MN$ tại H, theo định lý, H là trung điểm của MN.
2. Do đó, $MH = HN = MN / 2 = 24 / 2 = 12\text{cm}$.
3. Xét tam giác OMH vuông tại H, có OM là bán kính ($OM = 13\text{cm}$).
4. Áp dụng định lý Pytago: $OH^2 + MH^2 = OM^2$.
5. $\Rightarrow OH^2 = OM^2 - MH^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$.
6. $\Rightarrow OH = 5\text{cm}$. Vậy khoảng cách từ tâm O đến dây MN là 5cm.

b. Định lý 2 (Đảo): Đường kính đi qua trung điểm của dây

Phát biểu: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Tóm tắt: Cho $(O; R)$, đường kính AB , dây CD không đi qua O . Nếu **$IC = ID$** thì **$AB \perp CD$** .

Lưu ý: Điều kiện "dây không đi qua tâm" là quan trọng. Nếu dây đi qua tâm (tức là một đường kính khác), thì đường kính đi qua trung điểm của nó (chính là tâm O) không nhất thiết phải vuông góc với nó.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) có đường kính 20cm . Dây AB có độ dài 16cm . Gọi M là trung điểm của AB . Đường thẳng OM cắt đường tròn tại C và D . Chứng minh $OM \perp AB$ và tính độ dài OM .

Giải:

- Bán kính $R = 20 / 2 = 10\text{cm}$.
- Vì M là trung điểm của dây AB (và AB không phải đường kính vì $16\text{cm} < 20\text{cm}$), theo định lý đảo, ta có **$OM \perp AB$** .
- Xét tam giác OMA vuông tại M . Ta có OA là bán kính ($OA = 10\text{cm}$).
- M là trung điểm AB nên $AM = AB / 2 = 16 / 2 = 8\text{cm}$.
- Áp dụng định lý Pytago: **$OM^2 + AM^2 = OA^2$** .
- $\Rightarrow OM^2 = OA^2 - AM^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$.
- $\Rightarrow OM = 6\text{cm}$.