

Tổng hợp kiến thức: Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng

Chuyên đề này cung cấp đầy đủ các kiến thức và phương pháp cần thiết để giải quyết bài toán tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một khối lăng trụ đứng, một dạng toán thường gặp trong chương trình Hình học không gian lớp 12 và các kỳ thi quan trọng.

1. Điều kiện để một khối lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp

Không phải mọi khối lăng trụ đều có mặt cầu ngoại tiếp. Một khối lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- **Lăng trụ phải là lăng trụ đứng.** (Tức là các cạnh bên vuông góc với mặt đáy).
- **Đáy của lăng trụ phải là một đa giác nội tiếp được một đường tròn.** (Ví dụ: tam giác, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân,...).

2. Phương pháp xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng

a. Xác định tâm mặt cầu (I)

Tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng được xác định qua các bước sau:

1. Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy của lăng trụ. Đường thẳng OO' được gọi là trục của lăng trụ. Do lăng trụ đứng nên OO' vuông góc với cả hai mặt đáy.
2. Mọi điểm nằm trên đường thẳng OO' sẽ cách đều các đỉnh của hai đa giác đáy tương ứng.
3. Để một điểm cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ, nó phải nằm trên trục OO' và cách đều hai mặt đáy.
4. **Kết luận:** Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng chính là **trung điểm của đoạn thẳng OO'**.

b. Công thức tổng quát tính bán kính mặt cầu (R)

Sau khi đã xác định được tâm I, ta có thể tính bán kính R. Xét một đỉnh A bất kỳ trên đáy (tâm O) và tâm mặt cầu I.

Ta có tam giác IOA là tam giác vuông tại O, với:

- $IA = R$ (bán kính mặt cầu).
- $OA = R_{\text{đáy}}$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy).
- $IO = h/2$ (với h là chiều cao của lăng trụ, bằng độ dài cạnh bên).

Áp dụng định lý Pitago, ta có công thức tổng quát:

$$R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + (1/2h)^2}$$

3. Áp dụng cho các trường hợp cụ thể

Để tính được R, mấu chốt là phải tính được bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ($R_{\text{đáy}}$).

3.1. Lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông

Với tam giác ABC vuông tại A:

- **Tâm đường tròn ngoại tiếp:** Trung điểm O của cạnh huyền BC.

- **Công thức $R_{\text{đáy}}$:** $R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2}$

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 3a, BC = 4a, cạnh bên AA' = 6a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Giải:

- Đáy là tam giác vuông tại B nên cạnh huyền là AC. $R_{\text{đáy}}$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- $R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25a^2} = \frac{1}{2}(5a) = 2.5a$.
- Chiều cao lăng trụ $h = AA' = 6a$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + (\frac{1}{2}h)^2} = \sqrt{(2.5a)^2 + (\frac{1}{2} * 6a)^2} = \sqrt{6.25a^2 + (3a)^2} = \sqrt{15.25a^2} = a\sqrt{61} / 2$.

3.2. Lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều

Với tam giác đều ABC cạnh a:

- **Tâm đường tròn ngoại tiếp:** Trọng tâm O của tam giác.

- **Công thức $R_{\text{đáy}}$:** $R_{\text{đáy}} = \frac{2}{3} * (\text{đường trung tuyến}) = \frac{2}{3} * (a\sqrt{3} / 2) = a\sqrt{3} / 3$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2, chiều cao lăng trụ bằng 4. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Giải:

- Đáy là tam giác đều cạnh 2, nên $R_{\text{đáy}} = (2\sqrt{3}) / 3$.
- Chiều cao $h = 4$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + (\frac{1}{2}h)^2} = \sqrt{((2\sqrt{3})/3)^2 + (4/2)^2} = \sqrt{(12/9) + 4} = \sqrt{(4/3) + 4} = \sqrt{16/3} = 4\sqrt{3} / 3$.

3.3. Lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật

Với hình chữ nhật ABCD có hai cạnh a, b :

- **Tâm đường tròn ngoại tiếp:** Giao điểm O của hai đường chéo.
- **Công thức $R_{\text{đáy}}$:** $R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} * (\text{đường chéo}) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 6, AD = 8, AA' = 10$.

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Giải:

- Đáy là hình chữ nhật ABCD có $R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$.
- Chiều cao $h = AA' = 10$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + (\frac{1}{2}h)^2} = \sqrt{5^2 + (10/2)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
- *Lưu ý:* Đối với hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c , bán kính mặt cầu ngoại tiếp cũng có thể tính nhanh bằng công thức $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3.4. Lăng trụ đứng có đáy là hình vuông

Với hình vuông ABCD cạnh a:

- **Tâm đường tròn ngoại tiếp:** Giao điểm O của hai đường chéo.
- **Công thức $R_{\text{đáy}}$:** $R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} * (\text{đường chéo}) = \frac{1}{2} * (a\sqrt{2}) = a\sqrt{2} / 2$

Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh 4cm, cạnh bên bằng 6cm. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Giải:

- Đáy là hình vuông cạnh 4, nên $R_{\text{đáy}} = (4\sqrt{2}) / 2 = 2\sqrt{2}$.
- Chiều cao $h = 6$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + (\frac{1}{2}h)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (6/2)^2} = \sqrt{8 + 9} = \sqrt{17}$.

4. Bảng tổng hợp công thức

Loại đáy lăng trụ đứng	Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy ($R_{\text{đáy}}$)	Bán kính mặt cầu ngoại tiếp (R)
Tam giác vuông (cạnh huyền c)	$R_{\text{đáy}} = c / 2$	$R = \sqrt{R_{\text{đáy}}^2 + (h/2)^2}$
Tam giác đều (cạnh a)	$R_{\text{đáy}} = a\sqrt{3} / 3$	
Hình vuông (cạnh a)	$R_{\text{đáy}} = a\sqrt{2} / 2$	
Hình chữ nhật (cạnh a, b)	$R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$	

Kết luận

Việc xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng quy về hai bài toán cốt lõi: tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và áp dụng công thức Pitago trong không gian. Nắm vững công thức tổng quát và các công thức tính nhanh cho từng loại đáy sẽ giúp học sinh giải quyết dạng bài này một cách hiệu quả và chính xác.