

Chuyên đề: Vị trí tương đối của hai đường tròn

Chuyên đề này tổng hợp toàn bộ kiến thức quan trọng về vị trí tương đối giữa hai đường tròn, các hệ thức liên quan và các tính chất hình học đi kèm. Đây là một phần kiến thức nền tảng trong chương trình Hình học lớp 9.

I. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn

Xét hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R \geq r$. Gọi $d = OO'$ là khoảng cách giữa hai tâm.

1. Hai đường tròn cắt nhau

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn có 2 điểm chung. Hai điểm chung đó gọi là hai giao điểm. Đoạn thẳng nối hai điểm chung gọi là dây chung.
- **Hệ thức:** $R - r \leq d \leq R + r$
- **Giải thích:** Khoảng cách giữa hai tâm lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng hai bán kính.
- **Ví dụ:** Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và $(O'; 3\text{cm})$. Khoảng cách $OO' = 6\text{cm}$.
Ta có: $R - r = 5 - 3 = 2\text{cm}$ và $R + r = 5 + 3 = 8\text{cm}$.
Vì $2\text{cm} < 6\text{cm} < 8\text{cm}$ (tức là $R - r < d < R + r$), nên hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm.

2. Hai đường tròn tiếp xúc nhau

Hai đường tròn chỉ có 1 điểm chung. Điểm chung đó được gọi là tiếp điểm.

- **a. Tiếp xúc ngoài**

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn có 1 điểm chung và nằm ngoài nhau.
- **Hệ thức:** $d = R + r$
- **Giải thích:** Khoảng cách giữa hai tâm bằng tổng hai bán kính.
- **Ví dụ:** Cho đường tròn (O; 7cm) và (O'; 3cm). Khoảng cách $OO' = 10\text{cm}$.
Ta có: $R + r = 7 + 3 = 10\text{cm}$.
Vì $d = R + r$ ($10\text{cm} = 10\text{cm}$), nên hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau.

- **b. Tiếp xúc trong**

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn có 1 điểm chung và đường tròn này nằm trong đường tròn kia.
- **Hệ thức:** $d = R - r$ (với $R > r$)
- **Giải thích:** Khoảng cách giữa hai tâm bằng hiệu hai bán kính.
- **Ví dụ:** Cho đường tròn (O; 8cm) và (O'; 5cm). Khoảng cách $OO' = 3\text{cm}$.
Ta có: $R - r = 8 - 5 = 3\text{cm}$.
Vì $d = R - r$ ($3\text{cm} = 3\text{cm}$), nên hai đường tròn này tiếp xúc trong với nhau.

3. Hai đường tròn không giao nhau

Hai đường tròn không có điểm chung nào.

- **a. Hai đường tròn ở ngoài nhau**

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn không có điểm chung và nằm tách biệt nhau.
- **Hệ thức:** $d > R + r$
- **Giải thích:** Khoảng cách giữa hai tâm lớn hơn tổng hai bán kính.
- **Ví dụ:** Cho đường tròn $(O; 6\text{cm})$ và $(O'; 4\text{cm})$. Khoảng cách $OO' = 12\text{cm}$.
Ta có: $R + r = 6 + 4 = 10\text{cm}$.
Vì $d > R + r$ ($12\text{cm} > 10\text{cm}$), nên hai đường tròn này ở ngoài nhau.

- **b. Hai đường tròn đựng nhau**

- **Định nghĩa:** Hai đường tròn không có điểm chung và đường tròn này nằm hoàn toàn trong đường tròn kia.
- **Hệ thức:** $d \leq R - r$ (với $R > r$)
- **Giải thích:** Khoảng cách giữa hai tâm nhỏ hơn hiệu hai bán kính.
- **Trường hợp đặc biệt:** Nếu $d = 0$, hai đường tròn đồng tâm.
- **Ví dụ:** Cho đường tròn $(O; 10\text{cm})$ và $(O'; 3\text{cm})$. Khoảng cách $OO' = 4\text{cm}$.
Ta có: $R - r = 10 - 3 = 7\text{cm}$.
Vì $d \leq R - r$ ($4\text{cm} \leq 7\text{cm}$), nên đường tròn (O') nằm trong đường tròn (O) .

II. Bảng tổng kết vị trí tương đối

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R, r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r \leq d \leq R + r$
Tiếp xúc ngoài	1	$d = R + r$
Tiếp xúc trong	1	$d = R - r \text{ (} R > r \text{)}$
Ở ngoài nhau	0	$d > R + r$
Đụng nhau	0	$d = R - r \text{ (} R > r \text{)}$
Đồng tâm	0	$d = 0$

III. Tính chất đường nối tâm

Đường nối tâm là đường thẳng đi qua tâm của hai đường tròn. Đoạn nối tâm là đoạn thẳng nối hai tâm đó.

1. Định lý 1: Đối với hai đường tròn cắt nhau

- **Phát biểu:** Nếu hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.
- **Hệ quả:** Đường nối tâm vuông góc với dây chung tại trung điểm của dây chung.
- **Ví dụ:** Hai đường tròn (O; 10cm) và (O'; 17cm) cắt nhau tại A và B. Biết dây chung AB = 16cm. Tính độ dài đoạn nối tâm OO'.

Giải:

1. Gọi I là giao điểm của OO' và AB . Theo tính chất, $OO' \perp AB$ tại I và I là trung điểm của AB .
2. Do đó, $IA = IB = AB/2 = 16/2 = 8\text{cm}$.
3. Xét tam giác vuông OIA , ta có: $OI^2 = OA^2 - IA^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$.
Suy ra $OI = 6\text{cm}$.
4. Xét tam giác vuông $O'IA$, ta có: $O'I^2 = O'A^2 - IA^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$. Suy ra $O'I = 15\text{cm}$.
5. Vì O và O' nằm khác phía so với dây AB , nên $OO' = OI + O'I = 6 + 15 = 21\text{cm}$.

2. Định lý 2: Đối với hai đường tròn tiếp xúc nhau

- **Phát biểu:** Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- **Hệ quả:** Ba điểm O, O' và tiếp điểm A thẳng hàng.
- **Ví dụ:** Cho hai đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và $(O'; 3\text{cm})$ tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng d đi qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N (M, N khác A). Chứng minh $OM \parallel O'N$.

Giải:

1. Vì (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A nên O, A, O' thẳng hàng.
2. Xét tam giác OAM , có $OA = OM = 5\text{cm}$ (bán kính) nên tam giác OAM cân tại O. Suy ra góc $OMA =$ góc OAM .

3. Xét tam giác $O'AN$, có $O'A = O'N = 3\text{cm}$ (bán kính) nên tam giác $O'AN$ cân tại O' . Suy ra góc $O'NA = \text{góc } O'AN$.
4. Góc OAM và góc $O'AN$ là hai góc đối đỉnh nên góc $OAM = \text{góc } O'AN$.
5. Từ đó suy ra góc $OMA = \text{góc } O'NA$. Hai góc này ở vị trí so le trong, do đó $OM \parallel O'N$.

IV. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

1. Phân loại

- **Tiếp tuyến chung ngoài:** Là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.
- **Tiếp tuyến chung trong:** Là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

2. Số lượng tiếp tuyến chung

Số lượng tiếp tuyến chung phụ thuộc vào vị trí tương đối của hai đường tròn:

- **$d > R + r$ (Ở ngoài nhau):** Có 4 tiếp tuyến chung (2 ngoài, 2 trong).
- **$d = R + r$ (Tiếp xúc ngoài):** Có 3 tiếp tuyến chung (2 ngoài, 1 trong tại tiếp điểm).
- **$R - r < d < R + r$ (Cắt nhau):** Có 2 tiếp tuyến chung (2 ngoài).
- **$d = R - r$ (Tiếp xúc trong):** Có 1 tiếp tuyến chung (1 ngoài tại tiếp điểm).
- **$d < R - r$ (Đựng nhau):** Không có tiếp tuyến chung nào.

3. Ví dụ tính toán

Ví dụ 1: Cho hai đường tròn $(O; 6\text{cm})$ và $(O'; 2\text{cm})$ ở ngoài nhau với $OO' = 10\text{cm}$. Gọi AB là một tiếp tuyến chung ngoài ($A \in (O), B \in (O')$). Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Giải:

1. Kẻ $O'H \perp OA$ tại H ($H \in OA$).
2. Tứ giác $ABO'H$ là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông: góc $A =$ góc $B =$ góc $H = 90^\circ$). Suy ra $AB = O'H$ và $AH = O'B = 2\text{cm}$.
3. Ta có $OH = OA - AH = 6 - 2 = 4\text{cm}$.
4. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông $OO'H$:
$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2$$
$$\Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84.$$
5. Suy ra $O'H = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ cm}$.
6. Vậy độ dài tiếp tuyến chung ngoài $AB = 2\sqrt{21} \text{ cm}$.

Công thức tổng quát (Tiếp tuyến chung ngoài): $AB = \sqrt{[d^2 - (R - r)^2]}$

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và $(O'; 3\text{cm})$ ở ngoài nhau với $OO' = 12\text{cm}$. Gọi CD là một tiếp tuyến chung trong ($C \in (O), D \in (O')$). Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Giải:

1. Kẻ $O'K \perp OC$ kéo dài tại K .

2. Tứ giác CDO'K là hình chữ nhật (vì có 3 góc vuông: góc C = góc D = góc K = 90°). Suy ra $CD = O'K$ và $CK = O'D = 3\text{cm}$.
3. Ta có $OK = OC + CK = 5 + 3 = 8\text{cm}$.
4. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông OO'K:
- $$OO'^2 = OK^2 + O'K^2$$
- $$\Rightarrow O'K^2 = OO'^2 - OK^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80.$$
5. Suy ra $O'K = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\text{ cm}$.
6. Vậy độ dài tiếp tuyến chung trong CD = $4\sqrt{5}\text{ cm}$.

Công thức tổng quát (Tiếp tuyến chung trong): $CD = \sqrt{d^2 - (R + r)^2}$ (chỉ áp dụng khi $d > R + r$)