

Tổng hợp kiến thức Cấp số cộng và Cấp số nhân

Tài liệu này cung cấp một cái nhìn toàn diện về hai loại dãy số quan trọng trong chương trình Toán lớp 10: Cấp số cộng và Cấp số nhân. Nội dung bao gồm định nghĩa, các công thức cốt lõi và các dạng bài tập từ cơ bản đến nâng cao.

I. Cấp số cộng (CSC)

Cấp số cộng là một dãy số trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi gọi là công sai.

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) được gọi là cấp số cộng nếu với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$u_{n+1} = u_n + d$$

- d : là hằng số, được gọi là **công sai** (common difference).
- Nếu $d = 0$, cấp số cộng là một dãy số không đổi.

Ví dụ 1: Dãy số 2, 5, 8, 11, 14,... là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

Ví dụ 2: Dãy số 10, 8, 6, 4, 2, 0,... là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = -2$.

2. Số hạng tổng quát

Công thức số hạng tổng quát của một cấp số cộng cho phép tìm bất kỳ số hạng nào trong dãy nếu biết số hạng đầu và công sai.

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

- u_n : số hạng thứ n .
- u_1 : số hạng đầu tiên.
- n : vị trí của số hạng.
- d : công sai.

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng có $u_1 = 5$ và $d = 4$. Tìm số hạng thứ 10.

Giải: Áp dụng công thức, ta có $u_{10} = u_1 + (10 - 1)d = 5 + 9 \cdot 4 = 5 + 36 = 41$.

Ví dụ 2: Một cấp số cộng có $u_3 = 7$ và $u_7 = 19$. Tìm u_1 và d .

Giải: Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_3 = u_1 + 2d = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_7 = u_1 + 6d = 19 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình, ta được $4d = 12 \Rightarrow d = 3$. Thay $d = 3$ vào phương trình đầu, ta có $u_1 + 2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow u_1 = 1$.

3. Tính chất các số hạng

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó.

$$u_k = (u_{k-1} + u_{k+1}) / 2 \text{ (với } k \geq 2)$$

Ví dụ: Cho ba số $x, 8, 12$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

Giải: Theo tính chất của CSC, ta có $8 = (x + 12) / 2$. Suy ra $16 = x + 12 \Rightarrow x = 4$.

4. Tổng n số hạng đầu

Công thức tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng.

$$S_n = (n/2) * (u_1 + u_n)$$

Hoặc có thể viết dưới dạng:

$$S_n = (n/2) * [2u_1 + (n - 1)d]$$

Ví dụ 1: Tính tổng 20 số hạng đầu của CSC có $u_1 = 2$ và $d = 3$.

Giải: Áp dụng công thức, $S_{20} = (20/2) * [2*2 + (20 - 1)*3] = 10 * [4 + 19*3] = 10 * [4 + 57] = 10 * 61 = 610$.

Ví dụ 2: Một rạp hát có 30 hàng ghế. Hàng đầu tiên có 20 ghế, mỗi hàng sau nhiều hơn hàng trước 2 ghế. Tính tổng số ghế trong rạp.

Giải: Đây là một CSC với $u_1 = 20$, $d = 2$ và $n = 30$. Tổng số ghế là $S_{30} = (30/2) * [2*20 + (30 - 1)*2] = 15 * [40 + 29*2] = 15 * [40 + 58] = 15 * 98 = 1470$ ghế.

II. Cấp số nhân (CSN)

Cấp số nhân là một dãy số trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi gọi là công bội.

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) được gọi là cấp số nhân nếu với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$u_{n+1} = u_n * q$$

- q : là hằng số, được gọi là **công bội** (common ratio).
- Nếu $q = 1$, cấp số nhân là một dãy số không đổi.

- Nếu $u_1 = 0$ hoặc $q = 0$, các số hạng từ u_2 trở đi đều bằng 0.

Ví dụ 1: Dãy số 3, 6, 12, 24,... là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$.

Ví dụ 2: Dãy số 81, -27, 9, -3,... là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 81$ và công bội $q = -1/3$.

2. Số hạng tổng quát

Công thức số hạng tổng quát của một cấp số nhân:

$$u_n = u_1 * q^{n-1}$$

- u_n : số hạng thứ n .
- u_1 : số hạng đầu tiên.
- q : công bội.

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân có $u_1 = 5$ và $q = 2$. Tìm số hạng thứ 8.

Giải: Áp dụng công thức, ta có $u_8 = u_1 * q^{8-1} = 5 * 2^7 = 5 * 128 = 640$.

Ví dụ 2: Một cấp số nhân có $u_2 = 6$ và $u_5 = 48$. Tìm u_1 và q .

Giải: Ta có:

$$\{ u_2 = u_1 * q = 6$$

$$\{ u_5 = u_1 * q^4 = 48$$

Lấy (2) chia (1) vế theo vế, ta được $q^3 = 48/6 = 8 \Rightarrow q = 2$. Thay $q = 2$ vào (1), ta có $u_1 * 2 = 6 \Rightarrow u_1 = 3$.

3. Tính chất các số hạng

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó.

$$u_k^2 = u_{k-1} * u_{k+1} \text{ (với } k \geq 2, \text{ các số hạng khác } 0)$$

Ví dụ: Cho ba số dương $x, 6, 18$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm x .

Giải: Theo tính chất của CSN, ta có $6^2 = x * 18$. Suy ra $36 = 18x \Rightarrow x = 2$.

4. Tổng n số hạng đầu

Công thức tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân (với $q \neq 1$):

$$S_n = u_1 * (1 - q^n) / (1 - q)$$

- Nếu $q = 1$, thì $S_n = n * u_1$.
- Đối với cấp số nhân lùi vô hạn (có $|q| < 1$), tổng của tất cả các số hạng là: $S = u_1 / (1 - q)$

Ví dụ 1: Tính tổng 10 số hạng đầu của CSN có $u_1 = 3$ và $q = 2$.

Giải: Áp dụng công thức, $S_{10} = 3 * (1 - 2^{10}) / (1 - 2) = 3 * (1 - 1024) / (-1) = 3 * (-1023) / (-1) = 3069$.

Ví dụ 2: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $9, -3, 1, -1/3, \dots$

Giải: Ta có $u_1 = 9$ và $q = -3/9 = -1/3$. Vì $|q| < 1$, nên đây là CSN lùi vô hạn. Tổng là $S = u_1 / (1 - q) = 9 / (1 - (-1/3)) = 9 / (4/3) = 27/4$.

III. So sánh Cấp số cộng và Cấp số nhân

Tiêu chí	Cấp số cộng (CSC)	Cấp số nhân (CSN)
Định nghĩa	$u_{n+1} = u_n + d$	$u_{n+1} = u_n * q$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n - 1)d$	$u_n = u_1 * q^{n-1}$
Tính chất	$u_k = (u_{k-1} + u_{k+1}) / 2$	$u_k^2 = u_{k-1} * u_{k+1}$
Tổng n số hạng đầu	$S_n = (n/2) * [2u_1 + (n - 1)d]$	$S_n = u_1 * (1 - q^n) / (1 - q)$

IV. Các dạng bài tập nâng cao và ứng dụng

1. Dạng 1: Tìm các yếu tố của cấp số khi biết thông tin gián tiếp

Đây là dạng bài yêu cầu thiết lập hệ phương trình từ các dữ kiện cho trước để tìm các yếu tố của cấp số như u_1 , d , q .

Ví dụ (CSC): Tìm một cấp số cộng biết tổng 3 số hạng đầu bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Giải: Gọi 3 số hạng là $u_1 - d$, u_1 , $u_1 + d$.

Tổng: $(u_1 - d) + u_1 + (u_1 + d) = 3u_1 = 15 \Rightarrow u_1 = 5$.

Tổng bình phương: $(5 - d)^2 + 5^2 + (5 + d)^2 = 83$

$\Leftrightarrow (25 - 10d + d^2) + 25 + (25 + 10d + d^2) = 83$

$\Leftrightarrow 75 + 2d^2 = 83 \Leftrightarrow 2d^2 = 8 \Leftrightarrow d^2 = 4 \Leftrightarrow d = \pm 2$.

Vậy có hai CSC thỏa mãn: 3, 5, 7 và 7, 5, 3.

2. Dạng 2: Chứng minh một dãy số là CSC hoặc CSN

Để chứng minh dãy (u_n) là CSC, ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n$. Nếu kết quả là hằng số thì đó là CSC. Để chứng minh là CSN, ta xét thương u_{n+1} / u_n (với $u_n \neq 0$).

Ví dụ (CSC): Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n = 7 - 3n$ là một cấp số cộng.

Giải: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = [7 - 3(n+1)] - [7 - 3n] = (7 - 3n - 3) - (7 - 3n) = -3$.

Vì hiệu là hằng số (-3) , nên dãy (u_n) là một CSC với công sai $d = -3$.

3. Dạng 3: Bài toán chứa tham số

Tìm điều kiện của tham số để ba số cho trước lập thành một CSC hoặc CSN.

Ví dụ: Tìm m để 3 số $1, m+1, 3m-1$ lập thành một cấp số nhân.

Giải: Để 3 số lập thành CSN, ta phải có $(m+1)^2 = 1 * (3m-1)$.

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 3m - 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 2 = 0.$$

Phương trình này có $\Delta = (-1)^2 - 4*1*2 = 1 - 8 = -7 < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm, không tồn tại giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu.

4. Dạng 4: Ứng dụng giải các bài toán thực tế

Cấp số cộng và cấp số nhân có nhiều ứng dụng trong các bài toán về tăng trưởng, lãi suất, vật lý...

Ví dụ (CSN): Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6%/năm, theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 5 năm, người đó nhận được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

Giải: Số tiền sau mỗi năm lập thành một cấp số nhân.

Số tiền ban đầu (u_1): 100 triệu.

Sau 1 năm (u_2): $100 * (1 + 0.06) = 100 * 1.06$.

Đây là CSN với số hạng đầu là $T_0 = 100$ và công bội $q = 1.06$.

Số tiền sau 5 năm là số hạng thứ 6 (T_5) của dãy $T_0, T_1, T_2, \dots, T_5$. Hoặc ta có thể coi $T_1 = 100 * 1.06$ là u_1 của dãy tiền cuối mỗi năm.

Số tiền sau 5 năm: $T_5 = T_0 * q^5 = 100 * (1.06)^5 \approx 133.82$ triệu đồng.

5. Dạng 5: Kết hợp CSC và CSN

Dạng bài tập phức tạp hơn, kết hợp cả hai loại cấp số.

Ví dụ: Tìm 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 6. Nếu lần lượt cộng vào 3 số đó các số 1, 2, 5 thì ta được một cấp số nhân.

Giải:

1. Gọi 3 số của CSC là $a-d, a, a+d$.

Tổng: $(a-d) + a + (a+d) = 3a = 6 \Rightarrow a = 2$.

Vậy 3 số của CSC là $2-d, 2, 2+d$.

2. Sau khi cộng, ta có 3 số mới: $(2-d)+1, 2+2, (2+d)+5$, tức là $3-d, 4, 7+d$.

Ba số này lập thành CSN nên: $4^2 = (3-d)(7+d)$.

$$\Leftrightarrow 16 = 21 + 3d - 7d - d^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = 21 - 4d - d^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 + 4d - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (d-1)(d+5) = 0. \text{ Vậy } d = 1 \text{ hoặc } d = -5.$$

- Nếu $d = 1$, CSC là: 1, 2, 3.

- Nếu $d = -5$, CSC là: 7, 2, -3.

Kiểm tra lại:

Với CSC 1, 2, 3 $\rightarrow$ CSN là 2, 4, 8 (đúng, $q=2$).

Với CSC 7, 2, -3 $\rightarrow$ CSN là 8, 4, 2 (đúng, $q=1/2$).

Vậy có hai bộ số thỏa mãn: (1, 2, 3) và (7, 2, -3).

VIDOCU.COM