

Tổng Hợp Kỹ Năng Giải Nhanh Toán Tổ Hợp, Xác Suất & Nhị Thức Newton

Tài liệu này cung cấp một cái nhìn tổng quan, đầy đủ về các kiến thức và kỹ năng cần thiết để giải quyết các bài toán liên quan đến Tổ hợp, Xác suất và Nhị thức Newton trong chương trình Toán lớp 12 và luyện thi THPT Quốc gia.

Phần I: Các Quy Tắc Đếm Cơ Bản

Đây là nền tảng để giải quyết mọi bài toán đếm phức tạp hơn.

1. Quy tắc cộng

- **Công thức:** Nếu một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \dots, A_k$, trong đó phương án A_i có n_i cách thực hiện và các phương án đôi một không có cách thực hiện nào chung, thì công việc đó có $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ cách thực hiện.
- **Giải thích:** Dùng khi công việc được chia thành nhiều phương án/trường hợp độc lập với nhau. Dấu hiệu nhận biết là từ "hoặc".
- **Ví dụ 1:** Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn làm lớp trưởng?
Giải: Có 2 phương án: chọn 1 bạn nam (25 cách) hoặc chọn 1 bạn nữ (20 cách). Vậy, số cách chọn là $25 + 20 = 45$ cách.

- **Ví dụ 2:** Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường hàng không. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B?

Giải: Có 2 phương án di chuyển: đi đường bộ (3 cách) hoặc đi đường hàng không (2 cách). Vậy, có $3 + 2 = 5$ cách.

2. Quy tắc nhân

- **Công thức:** Nếu một công việc phải hoàn thành qua k giai đoạn liên tiếp. Giai đoạn 1 có n_1 cách, giai đoạn 2 có n_2 cách, ..., giai đoạn k có n_k cách, thì công việc đó có $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ cách hoàn thành.
- **Giải thích:** Dùng khi công việc được chia thành nhiều giai đoạn/bước nối tiếp nhau. Dấu hiệu nhận biết là từ "và", "liên tiếp".

- **Ví dụ 1:** An muốn tạo một thực đơn cho bữa tối gồm 1 món khai vị, 1 món chính và 1 món tráng miệng. Nhà hàng có 4 món khai vị, 5 món chính, 3 món tráng miệng. Hỏi An có bao nhiêu cách tạo thực đơn?

Giải: Công việc có 3 giai đoạn: chọn món khai vị (4 cách), chọn món chính (5 cách), chọn món tráng miệng (3 cách). Vậy số cách tạo thực đơn là $4 \times 5 \times 3 = 60$ cách.

- **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Giải: Gọi số cần tìm là abc.

- Chọn a: có 5 cách.

- Chọn b (khác a): có 4 cách.

- Chọn c (khác a, b): có 3 cách.

Theo quy tắc nhân, có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số.

Phần II: Hoán Vị - Chỉnh Hợp - Tổ Hợp

Đây là các công cụ đếm nâng cao, cần phân biệt rõ ràng để tránh nhầm lẫn.

Tiêu chí	Hoán vị (Permutation)	Chỉnh hợp (Arrangement)	Tổ hợp (Combination)
Bản chất	Sắp xếp thứ tự tất cả n phần tử.	Chọn ra k phần tử từ n và có sắp xếp thứ tự.	Chọn ra k phần tử từ n và không sắp xếp thứ tự.
Công thức	$P_n = n!$	$A_n^k = n! / (n-k)!$	$C_n^k = n! / (k!(n-k)!)$
Dấu hiệu	Bài toán yêu cầu "sắp xếp", "xếp thành hàng", "tạo số từ tất cả các chữ số đã cho".	Bài toán yêu cầu "chọn và sắp xếp", "chọn người vào các chức vụ khác nhau", "tạo số có các chữ số khác nhau".	Bài toán yêu cầu "chọn một nhóm", "chọn một đội", "chọn các vật phẩm không phân biệt".

1. Hoán vị

- **Công thức:** $P_n = n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$
- **Giải thích:** Là số cách sắp xếp thứ tự cho n phần tử khác nhau.
- **Ví dụ 1:** Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh vào một hàng ghế dài có 5 chỗ?
Giải: Mỗi cách xếp là một hoán vị của 5 học sinh. Số cách xếp là $P_5 = 5! = 120$ cách.

- **Ví dụ 2:** Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

Giải: Mỗi số tạo thành là một hoán vị của 3 chữ số. Số các số lập được là $P_3 = 3! = 6$ số.

2. Chỉnh hợp

- **Công thức:** $A_n^k = n! / (n-k)!$ (Điều kiện: $1 \leq k \leq n$)
- **Giải thích:** Là số cách chọn k phần tử từ n phần tử và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó.
- **Ví dụ 1:** Một tổ có 10 người. Cần chọn ra 3 người để giữ các chức vụ: tổ trưởng, tổ phó, thư ký. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải: Chọn 3 người và phân vào 3 chức vụ khác nhau (có thứ tự). Số cách chọn là $A_{10}^3 = 10! / (10-3)! = 10 \times 9 \times 8 = 720$ cách.

- **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Giải: Mỗi số là một cách chọn 4 chữ số từ 6 chữ số và sắp xếp chúng. Số các số lập được là $A_6^4 = 6! / (6-4)! = 360$ số.

3. Tổ hợp

- **Công thức:** $C_n^k = n! / (k!(n-k)!)$ (Điều kiện: $0 \leq k \leq n$)
- **Giải thích:** Là số cách chọn k phần tử từ n phần tử mà không quan tâm đến thứ tự của chúng.
- **Ví dụ 1:** Một đội bóng chuyên có 12 vận động viên. Huấn luyện viên cần chọn ra 6 người để thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải: Chọn 6 người từ 12 người không phân biệt vị trí. Số cách chọn là $C_{12}^6 = 12! / (6!6!) = 924$ cách.

- **Ví dụ 2:** Trong một hộp có 5 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 viên bi, trong đó có 2 bi xanh và 1 bi đỏ?

Giải:

- Chọn 2 bi xanh từ 5 bi xanh: $C_5^2 = 10$ cách.

- Chọn 1 bi đỏ từ 4 bi đỏ: $C_4^1 = 4$ cách.

Theo quy tắc nhân, số cách lấy là $10 \times 4 = 40$ cách.

Phần III: Nhị Thức Newton

1. Công thức khai triển

- **Công thức:** $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n b^n$
- **Giải thích:** Công thức này cho phép khai triển lũy thừa bậc n của một tổng hai số (nhị thức).
- **Số hạng tổng quát thứ (k+1):** $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (với $k = 0, 1, \dots, n$)
- **Ví dụ:** Khai triển $(x + 2)^4$.

Giải: Áp dụng công thức với $a=x$, $b=2$, $n=4$:

$$\begin{aligned}(x + 2)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3(2)^1 + C_4^2 x^2(2)^2 + C_4^3 x^1(2)^3 + C_4^4 (2)^4 \\&= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot x^2 \cdot 4 + 4 \cdot x \cdot 8 + 1 \cdot 16 \\&= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\end{aligned}$$

2. Ứng dụng giải nhanh

Các dạng bài thường gặp là tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước.

a. Tìm hệ số của số hạng chứa x^m

• Phương pháp:

1. Viết công thức số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
2. Biến đổi phần chứa biến x về dạng x^p (p phụ thuộc vào k).
3. Cho $p = m$ để tìm k .
4. Thay k tìm được vào phần hệ số của T_{k+1} để có kết quả.

• Ví dụ: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $(2x - 1)^9$.

Giải:

- Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_9^k (2x)^{9-k} (-1)^k = C_9^k 2^{9-k} (-1)^k x^{9-k}$.
- Yêu cầu tìm hệ số của x^5 , nên ta có: $9 - k = 5 \Rightarrow k = 4$.
- Hệ số cần tìm là: $C_9^4 2^{9-4} (-1)^4 = C_9^4 2^5 = 126 \times 32 = 4032$.

b. Tìm số hạng không chứa x (số hạng độc lập)

- **Phương pháp:** Đây là trường hợp đặc biệt của dạng trên, với $m = 0$. Ta cho số mũ của x bằng 0 để tìm k .
- **Ví dụ:** Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $(x + 1/x^2)^6$.

Giải:

- Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} (1/x^2)^k = C_6^k x^{6-k} x^{-2k} = C_6^k x^{6-3k}$.
- Số hạng không chứa x ứng với số mũ của x bằng 0: $6 - 3k = 0 \Rightarrow k = 2$.
- Số hạng cần tìm là: $T_{2+1} = C_6^2 x^0 = 15$.

Phần IV: Các Bài Toán Xác Suất

1. Công thức tính xác suất cổ điển

- **Không gian mẫu (Ω):** Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. $n(\Omega)$ là số phần tử của không gian mẫu.
- **Biến cố (A):** Một tập con của không gian mẫu. $n(A)$ là số kết quả thuận lợi cho biến cố A .
- **Công thức:** $P(A) = n(A) / n(\Omega)$
- **Ví dụ 1:** Gieo một con súc sắc cân đối. Tính xác suất để được mặt có số chấm là chẵn.

Giải:

- Không gian mẫu: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.
- Biến cố A : "mặt có số chấm là chẵn". $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$.
- Xác suất: $P(A) = n(A) / n(\Omega) = 3/6 = 1/2$.
- **Ví dụ 2:** Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn đều là nam.

Giải:

- Chọn 3 học sinh bất kỳ từ 40 học sinh: $n(\Omega) = C_{40}^3 = 9880$.
- Biến cố A : "chọn được 3 học sinh nam". Số cách chọn 3 nam từ 25 nam là $n(A) = C_{25}^3 = 2300$.
- Xác suất: $P(A) = 2300 / 9880 \approx 0.2328$.

2. Các quy tắc tính xác suất

a. Quy tắc cộng xác suất

- **Giải thích:** Dùng để tính xác suất của biến cố hợp ($A \cup B$), tức là "A hoặc B xảy ra".
- **Công thức:**
 - Nếu A và B xung khắc (không thể cùng xảy ra): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 - Nếu A và B bất kỳ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Ví dụ:** Một hộp chứa 10 quả cầu, trong đó có 3 quả đỏ và 7 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 quả. Tính xác suất lấy được quả đỏ hoặc quả xanh.
Giải: Gọi A là biến cố "lấy được quả đỏ", B là "lấy được quả xanh". A và B xung khắc.
 $P(A) = 3/10, P(B) = 7/10$.
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 3/10 + 7/10 = 1$.

b. Quy tắc nhân xác suất

- **Giải thích:** Dùng để tính xác suất của biến cố giao ($A \cap B$), tức là "cả A và B cùng xảy ra".
- **Công thức:** Nếu A và B độc lập (việc xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia): $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- **Ví dụ:** Gieo hai đồng xu cân đối. Tính xác suất để cả hai đồng xu đều ra mặt sấp.
Giải: Gọi A là "đồng xu thứ nhất ra mặt sấp", B là "đồng xu thứ hai ra mặt sấp". A và B độc lập.

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/2.$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/2 \times 1/2 = 1/4.$$

c. Biến cố đối

- **Giải thích:** Biến cố đối của A, ký hiệu là $\bar{A}$, là biến cố "A không xảy ra". Việc tính xác suất của $\bar{A}$ đôi khi dễ hơn tính P(A).

- **Công thức:** $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

- **Ví dụ:** Gieo 3 đồng xu. Tính xác suất để có ít nhất một mặt sấp.

Giải: Gọi A là biến cố "có ít nhất một mặt sấp".

Biến cố đối $\bar{A}$ là "không có mặt sấp nào", tức là cả 3 đồng xu đều ngửa.

$$n(\Omega) = 2^3 = 8.$$

$$n(\bar{A}) = 1 \text{ (trường hợp N-N-N).}$$

$$P(\bar{A}) = 1/8.$$

$$\text{Vậy, } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1/8 = 7/8.$$