

Tổng hợp kiến thức về Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Trong hình học không gian, việc xác định khoảng cách giữa các đối tượng là một trong những dạng toán quan trọng và thường gặp. Chuyên đề này sẽ tổng hợp đầy đủ kiến thức về định nghĩa, tính chất và các phương pháp tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, giúp học sinh nắm vững và vận dụng hiệu quả.

1. Định nghĩa và Tính chất

a. Định nghĩa

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Ký hiệu: $d((\alpha), (\beta))$

Công thức: $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$ trong đó M là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (α) .

Hoặc $d((\alpha), (\beta)) = d(N, (\alpha))$ trong đó N là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (β) .

b. Tính chất

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là không đổi, không phụ thuộc vào vị trí điểm được chọn.
- Khoảng cách này chính là độ dài đoạn thẳng vuông góc chung ngắn nhất nối hai mặt phẳng. Nếu $HK \perp (\alpha)$ tại H và $HK \perp (\beta)$ tại K thì $d((\alpha), (\beta)) = HK$.
- Nếu một đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì khoảng cách giữa d và (α) bằng khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên d đến (α) . Đây là một trường hợp đặc biệt liên quan.

2. Các phương pháp tính khoảng cách

Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, chúng ta có thể sử dụng một trong ba phương pháp chính sau đây.

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa (Đưa về khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng)

Nội dung phương pháp:

Đây là phương pháp cơ bản và phổ biến nhất. Các bước thực hiện như sau:

1. **Bước 1:** Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.
2. **Bước 2:** Chọn một điểm M thuận lợi (dễ xác định tọa độ hoặc dễ dựng hình chiếu) nằm trên mặt phẳng (α) .
3. **Bước 3:** Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (β) . Bài toán trở thành tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

Phân tích:

- Hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là hai mặt đáy của hình lập phương nên chúng song song với nhau.
- Ta chọn một điểm bất kỳ trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$, ví dụ điểm A' .
- Ta tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(ABCD)$.
- Vì AA' là cạnh bên của hình lập phương nên $AA' \perp (ABCD)$.
- Do đó, khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$ chính là độ dài đoạn AA' .

Lời giải:

Ta có $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

Chọn điểm $A' \in (A'B'C'D')$.

Khoảng cách cần tìm là $d((ABCD), (A'B'C'D')) = d(A', (ABCD))$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AA' \perp (ABCD)$.

Suy ra $d(A', (ABCD)) = AA' = a$.

Vậy, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ là a .

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$.

Phân tích:

- **Bước 1:** Chứng minh $(AB'D') \parallel (C'BD)$. Ta có $BD \parallel B'D'$. Dễ dàng chứng minh $CB' \parallel AD'$. Từ đó suy ra hai mặt phẳng song song.
- **Bước 2:** Chọn một điểm trên một mặt phẳng. Ví dụ, chọn điểm A trên $(AB'D')$.
- **Bước 3:** Tính khoảng cách $d(A, (C'BD))$. Đây là bài toán khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng quen thuộc. Ta có thể dùng phương pháp thể tích.

Lời giải:

Ta có $B'D' \parallel BD$ (vì cùng là đường chéo của hai hình chữ nhật bằng nhau).

Ta có $AD' \parallel BC'$ (vì $ABC'D'$ là hình bình hành).

Vì $\{BD, BC'\} \subset (C'BD)$ và $\{B'D', AD'\} \subset (AB'D')$, nên $(AB'D') \parallel (C'BD)$.

Do đó, $d((AB'D'), (C'BD)) = d(A, (C'BD))$.

Xét tứ diện $A.C'BD$. Ta có thể tích $V_{A.C'BD}$. Các đỉnh A, C', B, D cũng là các đỉnh của hình hộp. Ta có thể tính thể tích khối tứ diện này bằng cách lấy thể tích hình hộp trừ đi thể tích của 4 khối chóp $A.A'B'D'$, $C'.CBB'$, $D.D'AC$, $B.B'A'C'$.

$$V_{\text{hộp}} = abc.$$

$$V_{A.A'B'D'} = (1/3) * AA' * S_{A'B'D'} = (1/3) * c * (1/2 * a * b) = abc/6.$$

Tương tự, các khối chóp còn lại cũng có thể tích là $abc/6$.

$$\text{Vậy } V_{AC'BD} = V_{\text{hộp}} - 4 * (abc/6) = abc - 4abc/6 = abc/3.$$

$$\text{Mặt khác, } V_{A.C'BD} = (1/3) * d(A, (C'BD)) * S_{C'BD}.$$

Ta cần tính diện tích tam giác $C'BD$. Ta có:

$$BD^2 = a^2 + b^2$$

$$BC'^2 = b^2 + c^2$$

$$DC'^2 = a^2 + c^2$$

Sử dụng công thức Heron để tính diện tích $S_{C'BD} = (1/2) * \sqrt{((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2)}$.

Vậy $d(A, (C'BD)) = 3 * V_{A.C'BD} / S_{C'BD} = abc / ((1/2) * \sqrt{((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2)}) = 2abc / \sqrt{((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2)}$.

Đây là một công thức tính nhanh, nhưng cách chứng minh trên cho thấy bản chất của phương pháp.

Một cách tính khác cho $d(A, (C'BD))$ là dựng hình chiếu. Ta có AC' cắt $(C'BD)$ tại trọng tâm G của tam giác $C'BD$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng này bằng $1/3$ độ dài đường chéo AC' . $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Do đó $d = (1/3)AC'$. (Cách này cần chứng minh phức tạp hơn).

Phương pháp 2: Dựng đoạn vuông góc chung

Nội dung phương pháp:

Phương pháp này mang tính dựng hình cao, thường áp dụng cho các trường hợp đặc biệt, có nhiều yếu tố đối xứng.

- Bước 1:** Dựng một mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với cả hai mặt phẳng (α) và (β) .
- Bước 2:** Tìm giao tuyến của (γ) với (α) và (β) , giả sử là $a = (\gamma) \cap (\alpha)$ và $b = (\gamma) \cap (\beta)$. Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên $a \parallel b$.
- Bước 3:** Trong mặt phẳng (γ) , dựng đoạn thẳng HK vuông góc với cả a và b ($H \in a, K \in b$). Độ dài HK chính là khoảng cách cần tìm.

Công thức: $d((\alpha), (\beta)) = HK$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh rằng $(A'BM)$ song song với $(B'C'C)$ và tính khoảng cách giữa chúng.

Lời giải:

Phần chứng minh song song xin bỏ qua để tập trung vào tính khoảng cách.

Ta thấy rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với cả $(A'BM)$ và $(B'C'C)$ là không trực quan. Ta sẽ chuyển về phương pháp 1.

$$d((A'BM), (B'C'C)) = d(M, (B'C'C)).$$

Mặt phẳng $(B'C'C)$ chính là mặt phẳng $(BCC'B')$.

Trong mặt phẳng đáy (ABC) , kẻ $MH \perp BC$ tại H . Vì lăng trụ đứng nên $BB' \perp (ABC)$, suy ra $BB' \perp MH$.

Do đó $MH \perp (BCC'B')$.

$$\text{Vậy } d(M, (BCC'B')) = MH.$$

Vì M là trung điểm AC và $MH \parallel AB$ (do cùng vuông góc với BC), nên MH là đường trung bình của tam giác ABC .

$$\text{Suy ra } MH = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{a}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng là $\frac{a}{2}$.

Bình luận: Phương pháp 2 thường khó áp dụng vì việc tìm ra mặt phẳng phụ (γ) không phải lúc nào cũng dễ dàng. Thường thì phương pháp 1 sẽ tổng quát và dễ thực hiện hơn.

Phương pháp 3: Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian (Oxyz)

Nội dung phương pháp:

Đây là phương pháp mạnh, đặc biệt hiệu quả với các bài toán có nhiều yếu tố vuông góc, cho phép đại số hóa bài toán hình học.

1. **Bước 1:** Chọn một hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp, thường gắn gốc tọa độ vào một đỉnh có các cạnh đôi một vuông góc.

2. **Bước 2:** Xác định tọa độ các đỉnh liên quan. Từ đó viết phương trình của hai mặt phẳng song song (α) và (β) .

Do $(\alpha) // (\beta)$, phương trình của chúng sẽ có dạng:

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$(\beta): Ax + By + Cz + D_2 = 0 \text{ (với } D_1 \neq D_2 \text{)}$$

3. **Bước 3:** Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

$$\text{Công thức: } d((\alpha), (\beta)) = |D_1 - D_2| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$.

Lời giải:

Bước 1: Gắn hệ trục tọa độ Oxyz với gốc tại $A(0,0,0)$. Các trục tọa độ:

$$Ox \equiv AD, Oy \equiv AB, Oz \equiv AA'.$$

Bước 2: Xác định tọa độ các đỉnh:

$$A(0, 0, 0), B(0, a, 0), D(b, 0, 0), A'(0, 0, c)$$

$$B'(0, a, c), D'(b, 0, c), C'(b, a, c)$$

Viết phương trình mặt phẳng (AB'D'):

$$\text{Vector } AB' = (0, a, c)$$

$$\text{Vector } AD' = (b, 0, c)$$

Vector pháp tuyến của (AB'D') là $\mathbf{n}_1 = [AB', AD'] = (ac, bc, -ab)$.

Mặt phẳng (AB'D') đi qua A(0,0,0) nên có phương trình:

$$ac(x - 0) + bc(y - 0) - ab(z - 0) = 0 \Leftrightarrow acx + bcy - abz = 0.$$

Viết phương trình mặt phẳng (C'BD):

$$\text{Vector } BD = (b, -a, 0)$$

$$\text{Vector } BC' = (b, 0, c)$$

Vector pháp tuyến của (C'BD) là $\mathbf{n}_2 = [BD, BC'] = (-ac, -bc, ab)$.

Ta thấy $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, khẳng định hai mặt phẳng song song.

Mặt phẳng (C'BD) đi qua B(0, a, 0) nên có phương trình:

$$-ac(x - 0) - bc(y - a) + ab(z - 0) = 0 \Leftrightarrow -acx - bcy + abc + abz = 0 \Leftrightarrow acx + bcy - abz - abc = 0.$$

Bước 3: Áp dụng công thức:

$$(\alpha): acx + bcy - abz = 0 \quad (D_1 = 0)$$

$$(\beta): acx + bcy - abz - abc = 0 \quad (D_2 = -abc)$$

$$d((\alpha), (\beta)) = |0 - (-abc)| / \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (-ab)^2} = abc / \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ab)^2}.$$

Đây chính là kết quả đã tìm được ở phương pháp 1 nhưng cách làm rõ ràng và ít suy luận hình học hơn.

3. Bảng so sánh các phương pháp

Phương pháp	Ưu điểm	Nhược điểm	Khi nào nên dùng
1. Sử dụng định nghĩa	Tư duy hình học thuần túy, dễ hiểu về bản chất.	Việc dựng hình chiếu hoặc tính toán thể tích có thể phức tạp nếu hình không quen thuộc.	Khi dễ dàng chọn điểm và xác định được hình chiếu của điểm đó lên mặt phẳng kia, hoặc khi có thể áp dụng công thức thể tích.
2. Dựng đoạn vuông góc chung	Trực quan, cho thấy rõ đoạn khoảng cách cần tìm.	Rất khó dựng hình nếu không phải các dạng toán đặc biệt, có tính đối xứng cao.	Khi có thể xác định được một mặt phẳng phụ vuông góc với cả hai mặt phẳng song song.
3. Tọa độ hóa (Oxyz)	Phương pháp mạnh, tổng quát, giảm thiểu việc suy luận hình học phức tạp.	Yêu cầu kỹ năng tính toán tọa độ, viết phương trình cẩn thận. Việc chọn hệ trục không hợp lý có thể làm bài toán phức tạp hơn.	Khi bài toán cho hình có nhiều yếu tố vuông góc (hình hộp, hình chóp có cạnh bên vuông góc đáy) để dễ dàng gắn hệ trục tọa độ.

4. Lời kết

Việc tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là một dạng toán quan trọng, kết hợp nhiều kiến thức của hình học không gian. Nắm vững định nghĩa là chìa khóa để có thể linh hoạt chuyển đổi giữa các phương pháp. Tùy thuộc vào đặc điểm của bài toán, học sinh nên lựa chọn phương pháp phù hợp nhất để giải quyết một cách hiệu quả và chính xác. Luyện tập thường xuyên với các dạng bài tập khác nhau sẽ giúp củng cố kỹ năng và tư duy hình học không gian.