

I. Định nghĩa và cách nhận biết dạng vô định 0/0

Dạng vô định 0/0 xảy ra khi tính giới hạn của một thương $f(x)/g(x)$ tại điểm x_0 (hoặc tại vô cực), mà cả tử số và mẫu số đều tiến về 0.

• Công thức tổng quát:

Xét giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) / g(x)]$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, thì L có dạng vô định 0/0.

Lưu ý: Kết quả của giới hạn dạng 0/0 không phải là 0, 1 hay không xác định. Chúng ta phải sử dụng các phương pháp biến đổi đại số để khử dạng vô định này.

Ví dụ nhận biết:

1. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 - 1) / (x - 1)]$.

Khi thay $x = 1$ vào, ta có tử số $= 1^2 - 1 = 0$ và mẫu số $= 1 - 1 = 0$. Đây là dạng 0/0.

2. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{(x + 4)} - 2] / x$.

Khi thay $x = 0$ vào, ta có tử số $= \sqrt{(0 + 4)} - 2 = 2 - 2 = 0$ và mẫu số $= 0$. Đây là dạng 0/0.

II. Các phương pháp khử dạng vô định 0/0

1. Phương pháp 1: Phân tích đa thức thành nhân tử

Đây là phương pháp cơ bản nhất, áp dụng khi cả tử và mẫu đều là các đa thức.

- **Nguyên tắc:** Nếu $f(x_0) = 0$ và $g(x_0) = 0$, thì theo định lý Bê-du (Bézout), cả hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ đều có nhân tử chung là $(x - x_0)$.

- **Các bước thực hiện:**

1. Phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử, làm xuất hiện nhân tử chung $(x - x_0)$.
2. Rút gọn (chia) cả tử và mẫu cho nhân tử chung $(x - x_0)$.
3. Thay $x = x_0$ vào biểu thức đã rút gọn để tính giới hạn.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4) / (x - 2)]$

Giải:

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$. Đây là dạng $0/0$.

Phân tích tử số: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2)(x + 2) / (x - 2)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \text{ (Sau khi rút gọn nhân tử chung } x-2)$$

$$L = 2 + 2 = 4.$$

Ví dụ 2: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 - 3x + 2) / (x^3 - 1)]$

Giải:

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 1 - 3 + 2 = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 1 - 1 = 0$. Đây là dạng $0/0$.

Phân tích tử và mẫu:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)(x - 2) / (x - 1)(x^2 + x + 1)]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 2) / (x^2 + x + 1)]$$

$$L = (1 - 2) / (1^2 + 1 + 1) = -1 / 3.$$

2. Phương pháp 2: Nhân với biểu thức liên hợp

Phương pháp này được sử dụng khi biểu thức ở tử hoặc mẫu (hoặc cả hai) có chứa dấu căn (căn bậc hai, căn bậc ba).

- **Nguyên tắc:** Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của phần chứa căn để làm mất dấu căn, từ đó xuất hiện nhân tử chung $(x - x_0)$.
- **Các công thức liên hợp thường dùng:**
 - $A - B$ và $A + B$. Tích: $A^2 - B^2$
 - $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ và $\sqrt{A} + \sqrt{B}$. Tích: $A - B$
 - $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ và $\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B}^2$. Tích: $A - B$
 - $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ và $\sqrt[3]{A}^2 - \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{B}^2$. Tích: $A + B$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{1 + x} - 1) / x]$

Giải:

Đây là dạng $0/0$. Biểu thức trên tử chứa căn bậc hai.

Biểu thức liên hợp của $(\sqrt{1 + x} - 1)$ là $(\sqrt{1 + x} + 1)$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [((\sqrt{1 + x} - 1)(\sqrt{1 + x} + 1)) / (x(\sqrt{1 + x} + 1))]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - 1^2) / (x(\sqrt{1 + x} + 1))]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [x / (x(\sqrt[3]{1+x} + 1))]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [1 / (\sqrt[3]{1+x} + 1)] \text{ (Sau khi rút gọn nhân tử } x \text{)}$$

$$L = 1 / (\sqrt[3]{1+0} + 1) = 1 / (1 + 1) = 1/2.$$

Ví dụ 2: Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} [(\sqrt[3]{x} - 1) / (x - 1)]$

Giải:

Đây là dạng 0/0. Biểu thức trên tử chứa căn bậc ba.

Biểu thức liên hợp của $(\sqrt[3]{x} - 1)$ là $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} [((\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)) / ((x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1))]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1) / ((x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1))]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} [1 / (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)]$$

$$L = 1 / (\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1} + 1) = 1 / (1 + 1 + 1) = 1/3.$$

III. Bảng tổng hợp các phương pháp

Dạng biểu thức	Phương pháp xử lý	Lưu ý quan trọng
Tử và mẫu là các đa thức.	Phân tích thành nhân tử.	Luôn xuất hiện nhân tử chung (x - x₀) . Có thể dùng sơ đồ Horner hoặc chia đa thức để phân tích.
Biểu thức chứa căn bậc hai ($\sqrt{A - B}$).	Nhân liên hợp với ($\sqrt{A + B}$).	Sau khi nhân, tử số trở thành A - B² . Tiếp tục phân tích để rút gọn.
Biểu thức chứa căn bậc ba ($\sqrt[3]{A - B}$).	Nhân liên hợp với ($\sqrt[3]{A^2 + B^3A + B^2}$).	Sau khi nhân, tử số trở thành A - B³ .
Cả tử và mẫu đều chứa căn.	Nhân liên hợp cho cả tử và mẫu.	Thực hiện nhân liên hợp cho tử (nhân cả tử và mẫu), sau đó nhân liên hợp cho mẫu (nhân cả tử và mẫu).

IV. Bài tập vận dụng

Hãy thử áp dụng các phương pháp trên để giải các bài toán sau:

- Tính $L = \lim_{x \rightarrow -3} [(x^2 + 2x - 3) / (x + 3)]$
- Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^3 - 3x + 2) / (x^2 - 1)]$
- Tính $L = \lim_{x \rightarrow 4} [(\sqrt{x} - 2) / (x^2 - 16)]$

4. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 0} [(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) / x]$

Đáp án:

- 1. -4
- 2. 0
- 3. 1/32
- 4. 1