

Chuyên đề Cung và Góc của Đường tròn: Ứng dụng trong Thiết kế Bánh răng

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn toàn diện về các loại góc trong đường tròn và mối liên hệ của chúng với các cung tương ứng. Đặc biệt, chúng ta sẽ khám phá cách những kiến thức hình học tưởng chừng như trừu tượng này lại là nền tảng cho việc thiết kế và chế tạo các chi tiết cơ khí quan trọng như bánh răng.

Phần 1: Tổng hợp kiến thức về cung và góc của đường tròn

1. Góc ở tâm và Số đo cung

Định nghĩa: Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm của đường tròn.

Công thức:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó. **sđ cung AmB = góc AOB .**
- Số đo của cung lớn bằng 360° trừ đi số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn). **sđ cung AnB = 360° - sđ cung AmB .**
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180° .

Giải thích: Góc ở tâm là thước đo trực tiếp cho cung mà nó chắn. Độ lớn của góc quyết định độ dài của cung đó trên đường tròn.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và góc ở tâm $AOB = 70^\circ$. Tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn AB.

Giải:

Số đo cung nhỏ AB = số đo góc AOB = 70° .

Số đo cung lớn AB = $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.

Ví dụ 2: Trên đường tròn (O), lấy hai điểm C, D sao cho số đo cung lớn CD là 240° . Tính số đo góc ở tâm COD.

Giải:

Số đo cung nhỏ CD = $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

Số đo góc COD = số đo cung nhỏ CD = 120° .

2. Góc nội tiếp

Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Công thức: Số đo góc nội tiếp = $\frac{1}{2}$ số đo cung bị chắn.

Giải thích: Góc nội tiếp luôn có số đo bằng một nửa góc ở tâm cùng chắn một cung. Điều này dẫn đến nhiều hệ quả quan trọng.

Hệ quả:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông (90°).

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và dây cung BC không đi qua tâm. Biết số đo cung BC là 140° . Điểm A nằm trên cung lớn BC. Tính số đo góc BAC.

Giải:

Góc BAC là góc nội tiếp chắn cung nhỏ BC.

Số đo góc BAC = $\frac{1}{2} \times \text{sđ cung BC} = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$.

Ví dụ 2: Cho tam giác MNP nội tiếp đường tròn (O) có cạnh MN là đường kính. Tính số đo góc MPN.

Giải:

Vì MN là đường kính, góc MPN là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Do đó, số đo góc MPN = 90° .

3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

Định nghĩa: Là góc có đỉnh tại tiếp điểm, một cạnh là tia tiếp tuyến và cạnh kia chứa dây cung.

Công thức: Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung = $\frac{1}{2}$ số đo cung bị chắn.

Giải thích: Góc này có tính chất đo lường tương tự như góc nội tiếp, mặc dù cấu tạo của nó khác.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) và tiếp tuyến Ax tại A. Vẽ dây cung AB sao cho số đo cung AB là 88° . Tính số đo góc xAB.

Giải:

Góc xAB là góc tạo bởi tia tiếp tuyến Ax và dây cung AB. Cung bị chắn là cung AB.

Số đo góc xAB = $\frac{1}{2} \times \text{sđ cung AB} = \frac{1}{2} \times 88^\circ = 44^\circ$.

4. Góc có đỉnh ở bên trong và bên ngoài đường tròn

Để dễ so sánh, chúng ta có thể lập bảng sau:

Loại góc	Đặc điểm	Công thức tính số đo
Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn	Đỉnh nằm bên trong đường tròn. Mỗi góc chắn hai cung (một cung nằm trong góc và một cung nằm trong góc đối đỉnh của nó).	Số đo góc = $\frac{1}{2}$ (Tổng số đo hai cung bị chắn)
Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn	Đỉnh nằm bên ngoài đường tròn. Hai cạnh của góc có thể là hai cát tuyến, hoặc một cát tuyến và một tiếp tuyến, hoặc hai tiếp tuyến. Góc chắn hai cung nằm bên trong góc.	Số đo góc = $\frac{1}{2}$ (Hiệu số đo hai cung bị chắn)

Ví dụ (Góc có đỉnh bên trong): Trong đường tròn (O), hai dây cung AB và CD cắt nhau tại I. Biết sđ cung AC = 50° và sđ cung BD = 70° . Tính số đo góc AIC.

Giải:

Góc AIC chắn hai cung là AC và BD.

Số đo góc AIC = $\frac{1}{2} * (\text{sđ cung AC} + \text{sđ cung BD}) = \frac{1}{2} * (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$.

Ví dụ (Góc có đỉnh bên ngoài): Từ điểm M bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai cát tuyến MAB và MCD. Biết sđ cung AC = 30° và sđ cung BD = 110° . Tính số đo góc M.

Giải:

Góc M chắn hai cung là AC (cung nhỏ) và BD (cung lớn).

Số đo góc M = $\frac{1}{2} * (\text{sđ cung BD} - \text{sđ cung AC}) = \frac{1}{2} * (110^\circ - 30^\circ) = 40^\circ$.

5. Tứ giác nội tiếp

Định nghĩa: Tứ giác nội tiếp là tứ giác có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn.

Tính chất: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .

Dấu hiệu nhận biết:

1. Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .
2. Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó.
3. Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp.
4. Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

Phần 2: Ứng dụng trong thiết kế bánh răng

Bánh răng là một bộ phận cơ khí cơ bản, dùng để truyền chuyển động quay và momen xoắn giữa các trục. Nguyên lý hoạt động của bánh răng dựa trên sự ăn khớp chính xác giữa các răng, và sự chính xác này được xây dựng hoàn toàn dựa trên các nguyên tắc hình học của đường tròn.

1. Cấu tạo cơ bản của bánh răng

Một bánh răng được đặc trưng bởi các vòng tròn đồng tâm:

- **Vòng tròn chia (Pitch Circle):** Là một đường tròn tưởng tượng quyết định đến sự ăn khớp giữa hai bánh răng. Khi hai bánh răng ăn khớp, vòng tròn chia của chúng tiếp xúc với nhau.
- **Vòng tròn đỉnh (Addendum Circle):** Là đường tròn đi qua đỉnh của các răng.
- **Vòng tròn chân (Dedendum Circle):** Là đường tròn đi qua chân của các răng.

Các thông số hình học của bánh răng như số răng, khoảng cách giữa các răng đều được tính toán dựa trên các đường tròn này.

2. Áp dụng kiến thức cung và góc

a. Tính góc ở tâm giữa hai răng kề nhau

Các răng trên một bánh răng được phân bố đều trên chu vi của nó. Do đó, đường tròn chia được chia thành các cung bằng nhau, mỗi cung tương ứng với một răng.

Công thức: $\alpha = 360^\circ / N$

Trong đó:

- α là góc ở tâm giữa hai đường thẳng đi qua tâm và hai điểm tương ứng trên hai răng kề nhau.
- N là tổng số răng của bánh răng.

Ví dụ 1: Một bánh răng xe đạp có 40 răng. Tính góc ở tâm giữa hai răng kề nhau.

Giải:

Áp dụng công thức, ta có:

$$\alpha = 360^\circ / 40 = 9^\circ.$$

Vậy, góc ở tâm giữa hai răng kề nhau là 9° .

Ví dụ 2: Một bánh răng trong hộp số có góc giữa hai răng kề nhau đo được là 12° . Hỏi bánh răng đó có bao nhiêu răng?

Giải:

Từ công thức $\alpha = 360^\circ / N$, ta suy ra $N = 360^\circ / \alpha$.

$$N = 360^\circ / 12^\circ = 30.$$

Vậy, bánh răng có 30 răng.

b. Tính tỉ số truyền động

Tỉ số truyền là một trong những ứng dụng quan trọng nhất, cho biết mối quan hệ về tốc độ giữa hai bánh răng ăn khớp với nhau (bánh dẫn và bánh bị dẫn).

Công thức: $i = N_2 / N_1 = \omega_1 / \omega_2$

Trong đó:

- i là tỉ số truyền.
- N_1 và ω_1 là số răng và tốc độ góc (hoặc số vòng quay/phút) của bánh dẫn.
- N_2 và ω_2 là số răng và tốc độ góc (hoặc số vòng quay/phút) của bánh bị dẫn.

Giải thích: Công thức cho thấy tốc độ quay tỉ lệ nghịch với số răng. Bánh răng có nhiều răng hơn sẽ quay chậm hơn và ngược lại. Kiến thức này bắt nguồn từ việc chu vi của vòng tròn chia tỉ lệ thuận với số răng. Để ăn khớp, quãng đường đi được trên chu vi của hai bánh răng phải bằng nhau trong cùng một khoảng thời gian, dẫn đến mối quan hệ trên.

Ví dụ 1: Một hệ thống gồm bánh răng dẫn động (bánh 1) có 20 răng, ăn khớp với bánh răng bị dẫn (bánh 2) có 80 răng. Nếu bánh 1 quay với tốc độ 1200 vòng/phút, hãy tính tốc độ quay của bánh 2.

Giải:

Tỉ số truyền $i = N_2 / N_1 = 80 / 20 = 4$.

Ta có $i = \omega_1 / \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 / i$.

Tốc độ của bánh 2 là: $\omega_2 = 1200 / 4 = 300$ vòng/phút.

Như vậy, bánh răng lớn hơn quay chậm hơn 4 lần.

Ví dụ 2: Một nhà thiết kế cần tạo ra một bộ giảm tốc với tỉ số truyền là 3.5. Nếu bánh răng chủ động có 24 răng, bánh răng bị động cần có bao nhiêu răng?

Giải:

Ta có $i = N_2 / N_1 \Rightarrow N_2 = i * N_1$.

Số răng của bánh bị động là: $N_2 = 3.5 * 24 = 84$ răng.

Phần 3: Bài tập vận dụng tổng hợp

Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của CD .

1. Chứng minh 5 điểm M, A, O, I, B cùng thuộc một đường tròn.
2. Biết góc $AMB = 60^\circ$. Tính số đo cung nhỏ AB và cung lớn AB .
3. Nếu góc $AOB = 120^\circ$ và $R = 6\text{cm}$, hãy tính khoảng cách từ O đến dây AB .

Bài 2: Một hệ truyền động xích của xe máy bao gồm một đĩa xích ở động cơ (bánh dẫn) có 15 răng và một đĩa xích ở bánh sau (bánh bị dẫn) có 45 răng.

1. Tính tỉ số truyền của hệ thống.
2. Khi động cơ quay 3000 vòng/phút, bánh xe sau sẽ quay với tốc độ bao nhiêu vòng/phút?
3. Để xe chạy nhanh hơn (tăng tốc độ bánh sau) với cùng một tốc độ động cơ, người ta cần thay đổi số răng của đĩa xích sau như thế nào (tăng hay giảm)?
Giải thích.