

Tổng hợp kiến thức về Quan hệ chia hết và Ứng dụng

Trong các buổi sinh hoạt lớp hay hoạt động ngoại khóa, chúng ta thường gặp bài toán cần chia các bạn học sinh thành các đội sao cho số lượng thành viên ở mỗi đội là đều nhau. Để giải quyết vấn đề này một cách chính xác, chúng ta cần vận dụng kiến thức về quan hệ chia hết, đặc biệt là khái niệm về Ước chung lớn nhất. Hãy cùng tìm hiểu chi tiết nhé!

1. Phép chia hết và phép chia có dư

Đây là kiến thức nền tảng quan trọng nhất để hiểu về các phần sau.

a. Phép chia hết

Công thức: Cho hai số tự nhiên a và b , trong đó $b \neq 0$. Nếu có số tự nhiên q sao cho $a = b \cdot q$ thì ta nói a chia hết cho b .

Giải thích: Khi a chia hết cho b , ta còn nói a là bội của b và b là ước của a . Kí hiệu là $a : b$.

- **Ví dụ 1:** 12 chia hết cho 4 vì $12 = 4 \cdot 3$. Ta viết $12 : 4$.
- **Ví dụ 2:** 35 chia hết cho 5 vì $35 = 5 \cdot 7$. Ta viết $35 : 5$.

b. Phép chia có dư

Công thức: Cho hai số tự nhiên a và b , trong đó $b \neq 0$. Khi a không chia hết cho b , ta luôn tìm được hai số tự nhiên q và r sao cho $a = b \cdot q + r$ (với $0 < r < b$).

Giải thích: Trong đó, q là thương và r là số dư. Số dư luôn nhỏ hơn số chia.

- **Ví dụ 1:** 14 chia cho 3 được 4 dư 2, vì $14 = 3 \cdot 4 + 2$.
- **Ví dụ 2:** 25 chia cho 6 được 4 dư 1, vì $25 = 6 \cdot 4 + 1$.

2. Ước và Bội

a. Ước

Định nghĩa: Nếu số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì b được gọi là **ước** của a .

Cách tìm: Để tìm các ước của một số a ($a > 1$), ta lần lượt chia a cho các số tự nhiên từ 1 đến a . Nếu a chia hết cho số nào thì số đó là ước của a .

Kí hiệu: Tập hợp các ước của a được kí hiệu là $Ư(a)$.

- **Ví dụ 1:** Tìm các ước của 12.

Ta chia 12 cho các số từ 1 đến 12. Ta thấy 12 chia hết cho 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Vậy $Ư(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

- **Ví dụ 2:** Tìm các ước của 20.

$Ư(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

b. Bội

Định nghĩa: Nếu số tự nhiên a chia hết cho số tự nhiên b thì a được gọi là **bội** của b .

Cách tìm: Để tìm các bội của một số b ($b \neq 0$), ta nhân b lần lượt với 0, 1, 2, 3, ...

Kí hiệu: Tập hợp các bội của b được kí hiệu là B(b).

- **Ví dụ 1:** Tìm các bội của 6.

Ta nhân 6 với 0, 1, 2, 3, ...

$B(6) = \{6.0, 6.1, 6.2, 6.3, \dots\} = \{0, 6, 12, 18, \dots\}.$

- **Ví dụ 2:** Tìm các bội nhỏ hơn 30 của 7.

$B(7) = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, \dots\}.$

Các bội nhỏ hơn 30 của 7 là {0, 7, 14, 21, 28}.

3. Dấu hiệu chia hết

Để kiểm tra nhanh một số có chia hết cho các số thường gặp hay không, ta dùng các dấu hiệu sau:

Chia hết cho	Dấu hiệu nhận biết	Ví dụ
2	Các số có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.	152, 340, 998.
5	Các số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.	75, 190, 2025.
3	Các số có tổng các chữ số chia hết cho 3.	123 (vì $1+2+3=6, 6 : 3$), 789 (vì $7+8+9=24, 24 : 3$).
9	Các số có tổng các chữ số chia hết cho 9.	729 (vì $7+2+9=18, 18 : 9$), 450 (vì $4+5+0=9, 9 : 9$).

4. Số nguyên tố, Hợp số và Phân tích ra thừa số nguyên tố

a. Số nguyên tố

Định nghĩa: Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.

- **Ví dụ:** Các số 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... là các số nguyên tố.
- **Lưu ý:** Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất.

b. Hợp số

Định nghĩa: Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.

- **Ví dụ:** Các số 4 (có ước là 1,2,4), 6 (có ước là 1,2,3,6), 9 (có ước là 1,3,9)... là các hợp số.

c. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố

Định nghĩa: Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích của các thừa số nguyên tố.

Cách làm (theo cột dọc):

1. Chia số cần phân tích cho một số nguyên tố (thường là nhỏ nhất) mà nó chia hết.
2. Viết số nguyên tố đó vào cột bên phải.
3. Viết kết quả (thương) vào cột bên trái, dưới số ban đầu.
4. Tiếp tục quá trình cho đến khi thương bằng 1.
5. Tích của các số ở cột bên phải chính là dạng phân tích của số đó.

- **Ví dụ 1:** Phân tích số 60 ra thừa số nguyên tố.

$$60 \mid 2$$

$$30 \mid 2$$

$$15 \mid 3$$

$$5 \mid 5$$

$$1 \mid$$

$$\text{Vậy } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

- **Ví dụ 2:** Phân tích số 84 ra thừa số nguyên tố.

$$84 \mid 2$$

$$42 \mid 2$$

$$21 \mid 3$$

$$7 \mid 7$$

$$1 \mid$$

$$\text{Vậy } 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

5. Ước chung lớn nhất (ƯCLN)

Đây chính là chìa khóa để giải bài toán chia đội hình!

a. Ước chung (ƯC)

Định nghĩa: Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Kí hiệu: $ƯC(a, b)$.

- **Ví dụ:**

$$Ư(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$Ư(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

Các số vừa là ước của 18, vừa là ước của 30 là: 1, 2, 3, 6.

Vậy **$ƯC(18, 30) = \{1, 2, 3, 6\}$** .

b. Ước chung lớn nhất (ƯCLN)

Định nghĩa: Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

Kí hiệu: $ƯCLN(a, b)$.

Cách tìm ƯCLN bằng cách phân tích ra thừa số nguyên tố:

1. **Bước 1:** Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.
2. **Bước 2:** Chọn ra các thừa số nguyên tố **chung**.
3. **Bước 3:** Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với **số mũ nhỏ nhất** của nó. Tích đó là ƯCLN cần tìm.

• **Ví dụ 1:** Tìm $ƯCLN(18, 30)$.

Bước 1: $18 = 2 \cdot 3^2$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Bước 2: Thừa số nguyên tố chung là 2 và 3.

Bước 3: Số mũ nhỏ nhất của 2 là 1, của 3 là 1.

Vậy **$ƯCLN(18, 30) = 2^1 \cdot 3^1 = 6$** .

• **Ví dụ 2:** Tìm $ƯCLN(24, 36, 60)$.

Bước 1: $24 = 2^3 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Bước 2: Thừa số nguyên tố chung là 2 và 3.

Bước 3: Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2, của 3 là 1.

Vậy **$ƯCLN(24, 36, 60) = 2^2 \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$** .

6. Áp dụng vào bài toán chia đội hình đều nhau

Khi một bài toán yêu cầu "chia đều" một số lượng đối tượng (học sinh nam, nữ, cây, kẹo...) vào các nhóm sao cho số lượng mỗi đối tượng trong các nhóm là như nhau và hỏi về "số nhóm nhiều nhất có thể chia", đó chính là bài toán tìm ƯCLN.

Bài toán mẫu

Đề bài: Lớp 6A có 24 học sinh nam và 20 học sinh nữ tham gia một buổi lao động. Cô giáo muốn chia lớp thành các tổ sao cho số học sinh nam và số học sinh nữ ở mỗi tổ đều bằng nhau. Hỏi có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu tổ? Khi đó, mỗi tổ có bao nhiêu nam và bao nhiêu nữ?

Phân tích và giải:

1. **Xác định yêu cầu:** Bài toán yêu cầu tìm "số tổ nhiều nhất".

2. **Phân tích dữ kiện:**

- Gọi số tổ có thể chia là x .
- Vì số nam (24) được chia đều vào x tổ, nên 24 phải chia hết cho x . Suy ra: **$x \in \text{Ư}(24)$.**
- Vì số nữ (20) được chia đều vào x tổ, nên 20 phải chia hết cho x . Suy ra: **$x \in \text{Ư}(20)$.**
- Từ hai điều trên, x phải là ước chung của 24 và 20: **$x \in \text{ƯC}(24, 20)$.**
- Vì số tổ là nhiều nhất, nên x phải là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung. Do đó, **$x = \text{ƯCLN}(24, 20)$.**

3. Tiến hành tìm ƯCLN:

- Phân tích ra thừa số nguyên tố:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

- Thừa số nguyên tố chung là 2.
- Số mũ nhỏ nhất của 2 là 2.
- Vậy **$\text{ƯCLN}(24, 20) = 2^2 = 4$** .

4. Kết luận về số tổ: Có thể chia được nhiều nhất thành 4 tổ.

5. Tính số học sinh mỗi tổ:

- Số học sinh nam mỗi tổ: $24 / 4 = 6$ (học sinh).
- Số học sinh nữ mỗi tổ: $20 / 4 = 5$ (học sinh).

Đáp số: Có thể chia được nhiều nhất 4 tổ. Mỗi tổ có 6 nam và 5 nữ.

Ví dụ luyện tập

Bài tập: Một đội y tế có 36 bác sĩ và 108 y tá. Cần chia đội y tế đó thành các tổ sao cho số bác sĩ và y tá ở mỗi tổ là như nhau. Hỏi có thể chia thành nhiều nhất bao nhiêu tổ? Mỗi tổ có bao nhiêu bác sĩ, bao nhiêu y tá?

Hướng dẫn giải:

- Gọi số tổ nhiều nhất có thể chia là a.
- Theo đề bài, $a = \text{ƯCLN}(36, 108)$.
- Ta có: $36 = 2^2 \cdot 3^2$; $108 = 2^2 \cdot 3^3$.

- $ƯCLN(36, 108) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.
- Vậy có thể chia được nhiều nhất 36 tổ.
- Số bác sĩ mỗi tổ: $36 / 36 = 1$ (bác sĩ).
- Số y tá mỗi tổ: $108 / 36 = 3$ (y tá).

Chúc các em học tốt và vận dụng thành công kiến thức này vào giải quyết các bài toán thực tế!