

Ứng dụng của Tích phân trong Vật lý: Tính Quãng đường và Công

Tích phân không chỉ là một công cụ toán học trừu tượng mà còn có những ứng dụng vô cùng mạnh mẽ trong việc giải quyết các bài toán vật lý thực tế. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tập trung vào hai ứng dụng quan trọng nhất ở cấp THPT: tính quãng đường của một vật chuyển động với vận tốc không đều và tính công của một lực biến thiên.

1. Tính quãng đường khi biết vận tốc

a. Cơ sở lý thuyết

Trong chuyển động thẳng, mối quan hệ giữa quãng đường $S(t)$, vận tốc $v(t)$ và gia tốc $a(t)$ được thể hiện qua đạo hàm:

- Vận tốc là đạo hàm của quãng đường theo thời gian: $\mathbf{v(t) = S'(t)}$
- Gia tốc là đạo hàm của vận tốc theo thời gian: $\mathbf{a(t) = v'(t)}$

Từ đó, ta có thể suy ra mối quan hệ ngược lại bằng phép toán tích phân:

- Vận tốc là nguyên hàm của gia tốc: $\mathbf{v(t) = \int a(t)dt}$
- Quãng đường là nguyên hàm của vận tốc: $\mathbf{S(t) = \int v(t)dt}$

Phân biệt Độ dời và Quãng đường

Đây là một khái niệm quan trọng học sinh cần nắm vững để tránh nhầm lẫn khi làm bài.

Khái niệm	Đặc điểm	Công thức tích phân
Độ dời	Là độ thay đổi vị trí của vật, có thể có giá trị âm, dương hoặc bằng không. Nó chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và cuối.	$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
Quãng đường	Là tổng độ dài quãng đường mà vật đã di chuyển, luôn là một giá trị không âm.	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

Lưu ý: Nếu vật chuyển động theo một chiều không đổi ($v(t)$ luôn dương hoặc luôn âm) trong khoảng thời gian $[t_1, t_2]$, thì độ lớn của độ dời sẽ bằng quãng đường đi được.

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Chuyển động một chiều

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t^2 + 4t$ (m/s). Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ giây thứ 2 đến giây thứ 4.

Giải:

1. **Xét dấu vận tốc:** Với $t \in [2, 4]$, ta có $t > 0$ nên $v(t) = 3t^2 + 4t > 0$. Vật chuyển động theo một chiều dương.

2. **Tính quãng đường:** Vì $v(t) > 0$, quãng đường bằng độ dời.

$$S = \int_2^4 (3t^2 + 4t) dt$$

3. **Tính tích phân:**

$$S = [t^3 + 2t^2] \Big|_2^4 = (4^3 + 2 \cdot 4^2) - (2^3 + 2 \cdot 2^2)$$

$$S = (64 + 32) - (8 + 8) = 96 - 16 = 80 \text{ (m)}$$

Đáp số: Quãng đường vật đi được là 80 mét.

Ví dụ 2: Chuyển động có đổi chiều

Một chất điểm chuyển động với vận tốc $v(t) = 2 - t$ (m/s). Tính quãng đường chất điểm đi được từ $t = 0$ đến $t = 3$.

Giải:

1. **Xét dấu vận tốc:** Ta giải phương trình $v(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

2. **Lập bảng xét dấu:**

- Trong khoảng $(0, 2)$, $v(t) > 0$ (vật đi theo chiều dương).
- Trong khoảng $(2, 3)$, $v(t) < 0$ (vật đi ngược chiều dương).

3. **Tính quãng đường:** Vì vật có đổi chiều chuyển động, ta phải sử dụng công thức tích phân của giá trị tuyệt đối.

$$S = \int_0^3 |2 - t| dt$$

4. **Tách tích phân:**

$$S = \int_0^2 |2 - t| dt + \int_2^3 |2 - t| dt$$

$$S = \int_0^2 (2 - t) dt + \int_2^3 -(2 - t) dt = \int_0^2 (2 - t) dt + \int_2^3 (t - 2) dt$$

5. Tính toán:

$$S = [2t - t^2/2] \Big|_0^2 + [t^2/2 - 2t] \Big|_2^3$$

$$S = [(4 - 2) - 0] + [(9/2 - 6) - (2 - 4)]$$

$$S = 2 + [-3/2 - (-2)] = 2 + 1/2 = 2.5 \text{ (m)}$$

Đáp số: Quãng đường chất điểm đi được là 2.5 mét. (Lưu ý: độ dời trong trường hợp này là $\int_0^3 (2 - t) dt = 1.5 \text{ m}$).

2. Tính công của một lực biến thiên

a. Cơ sở lý thuyết

Trong vật lý, khi một lực **F** không đổi tác dụng lên một vật làm vật dịch chuyển một quãng đường **d** theo hướng của lực, công **A** sinh ra được tính bằng $A = F \cdot d$.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp thực tế, lực tác dụng lên vật không phải là hằng số mà thay đổi tùy thuộc vào vị trí của vật. Ví dụ như lực kéo một lò xo, lực hấp dẫn của Trái Đất... Khi đó, ta không thể dùng công thức đơn giản trên.

Giả sử một vật di chuyển dọc theo trục Ox dưới tác dụng của một lực $F(x)$ biến thiên (phụ thuộc vào vị trí x). Công sinh ra để di chuyển vật từ vị trí $x = a$ đến $x = b$ được tính bằng công thức:

$$A = \int_a^b F(x) dx$$

Trong đó:

- **A** là công (đơn vị: Joule - J)

- **$F(x)$** là hàm biểu thị độ lớn của lực tại vị trí x (đơn vị: Newton - N)
- **a, b** là vị trí đầu và vị trí cuối (đơn vị: mét - m)

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Công để kéo dãn lò xo (Định luật Hooke)

Một lò xo có chiều dài tự nhiên là 20 cm. Khi tác dụng một lực 5 N thì nó dãn ra thành 25 cm. Tính công cần thiết để kéo lò xo từ độ dài 25 cm đến 30 cm.

Giải:

1. Xác định hằng số lò xo k :

Theo định luật Hooke, lực đàn hồi của lò xo là $F = kx$, với x là độ dãn so với chiều dài tự nhiên.

Khi lực là 5 N, lò xo dãn từ 20 cm thành 25 cm, vậy độ dãn là $x = 25 - 20 = 5$ cm = 0.05 m.

Ta có: $5 = k * 0.05 \Rightarrow k = 100 \text{ (N/m)}$.

Vậy, hàm lực là **$F(x) = 100x$** .

2. Xác định cận tích phân:

Kéo lò xo từ 25 cm đến 30 cm tương ứng với việc kéo từ độ dãn $x_1 = 25 - 20 = 5$ cm = 0.05 m đến độ dãn $x_2 = 30 - 20 = 10$ cm = 0.1 m.

Vậy cận tích phân là từ $a = 0.05$ đến $b = 0.1$.

3. Tính công bằng tích phân:

$$A = \int_{0.05}^{0.1} 100x \, dx$$

$$A = [50x^2] \Big|_{0.05}^{0.1} = 50 * (0.1)^2 - 50 * (0.05)^2$$

$$A = 50 * 0.01 - 50 * 0.0025 = 0.5 - 0.125 = 0.375 \text{ (J)}$$

Đáp số: Công cần thiết là 0.375 Joules.

Ví dụ 2: Công để bơm nước ra khỏi bể

Một bể chứa hình hộp chữ nhật có kích thước đáy là 2m x 3m và chiều cao 1.5m, đang chứa đầy nước. Tính công cần thực hiện để bơm hết nước ra khỏi miệng bể. Biết khối lượng riêng của nước là 1000 kg/m^3 và $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$.

Giải:

1. **Chọn hệ trục tọa độ:** Chọn trục Oy thẳng đứng, gốc O ở đáy bể, chiều dương hướng lên trên. Miệng bể sẽ ở vị trí $y = 1.5$.

2. **Xét một lớp nước mỏng:**

Xét một lớp nước mỏng ở độ cao y , có độ dày là dy . Thể tích của lớp nước này là:

$$dV = (\text{Diện tích đáy}) * dy = (2 * 3) * dy = 6 dy \text{ (m}^3\text{)}$$

3. **Tính trọng lượng (lực) của lớp nước:**

$$\text{Khối lượng lớp nước: } dm = \rho * dV = 1000 * 6 dy = 6000 dy \text{ (kg)}$$

$$\begin{aligned} \text{Trọng lượng (lực cần thắng để nâng lớp nước): } dF &= g * dm = 9.8 * 6000 dy \\ &= 58800 dy \text{ (N)} \end{aligned}$$

4. **Tính quãng đường di chuyển của lớp nước:**

Lớp nước ở độ cao y cần được bơm lên miệng bể ở độ cao 1.5 m. Quãng đường di chuyển là $h = 1.5 - y$.

5. Tính công để bơm lớp nước:

Công để bơm lớp nước này là $dA = dF \cdot h = 58800(1.5 - y)dy$.

6. Tính tổng công bằng tích phân:

Để bơm hết nước, ta cần tính tổng công cho tất cả các lớp nước từ đáy ($y=0$) đến mặt nước ($y=1.5$).

$$A = \int_0^{1.5} 58800(1.5 - y) dy$$

$$A = 58800 \cdot [1.5y - y^2/2] \Big|_0^{1.5}$$

$$A = 58800 \cdot [(1.5 \cdot 1.5 - 1.5^2/2) - 0] = 58800 \cdot (2.25 - 1.125) = 58800 \cdot 1.125 = 66150 \text{ (J)}$$

Đáp số: Công cần thực hiện là 66150 Joules.

Kết luận

Qua các ví dụ trên, có thể thấy tích phân là một công cụ toán học không thể thiếu để mô hình hóa và giải quyết các bài toán vật lý phức tạp, đặc biệt là khi các đại lượng như vận tốc hay lực không phải là hằng số. Nắm vững cách thiết lập bài toán và áp dụng đúng công thức tích phân sẽ giúp học sinh giải quyết hiệu quả các dạng bài tập này trong các kỳ thi.