

Tổng hợp kiến thức: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong hình học không gian, việc xác định góc giữa các đối tượng là một trong những kiến thức nền tảng và quan trọng nhất. Bài viết này sẽ tổng hợp đầy đủ các phương pháp xác định và tính toán góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng, giúp học sinh tự tin giải quyết các bài toán liên quan.

I. Định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để hiểu rõ cách xác định góc, chúng ta cần nắm vững định nghĩa. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- **Trường hợp 1:** Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) , ta nói góc giữa chúng bằng 90° .
- **Trường hợp 2:** Nếu đường thẳng d song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P) , ta nói góc giữa chúng bằng 0° .
- **Trường hợp 3:** Nếu đường thẳng d cắt (P) và không vuông góc với (P) , thì góc giữa d và (P) được định nghĩa là **góc nhọn tạo bởi đường thẳng d và hình chiếu vuông góc d' của nó trên mặt phẳng (P)** .

Ký hiệu: Nếu gọi α là góc giữa d và (P) , ta có: $(d, (P)) = \alpha$. Theo định nghĩa, ta luôn có $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Minh họa góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Hình ảnh minh họa: d' là hình chiếu của d lên (P) , góc α là góc giữa d và d' .

II. Phương pháp xác định và tính toán góc

Để xác định góc giữa đường thẳng **d** và mặt phẳng **(P)** trong trường hợp chúng cắt nhau và không vuông góc, ta thực hiện theo 3 bước sau:

1. Các bước xác định góc

1. Bước 1: Tìm giao điểm

Xác định giao điểm **O** của đường thẳng **d** và mặt phẳng **(P)**. Điểm O chính là đỉnh của góc cần tìm.

2. Bước 2: Tìm hình chiếu vuông góc

Chọn một điểm **A** bất kỳ trên đường thẳng **d** (khác O). Từ A, hạ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng **(P)** tại điểm **H**. Khi đó, H là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

3. Bước 3: Xác định góc

Nối O và H, ta được đường thẳng OH. Đường thẳng OH chính là hình chiếu d' của d lên (P). Góc cần tìm chính là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng OA (chính là d) và OH (chính là d').

Góc giữa d và (P) là góc AOH ($\alpha = \angle AOH$).

2. Phương pháp tính số đo góc

Sau khi đã xác định được góc $\alpha = \angle AOH$, ta thấy rằng tam giác AOH luôn là tam giác vuông tại H (do $AH \perp (P)$ nên $AH \perp OH$). Do đó, ta có thể áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính số đo góc α :

- **$\sin(\alpha) = AH / OA$** (Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền)
- **$\cos(\alpha) = OH / OA$** (Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền)
- **$\tan(\alpha) = AH / OH$** (Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề)

Lưu ý: Trong các bài toán, việc tính độ dài đoạn thẳng **AH** (khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)) và độ dài đoạn thẳng **OA** thường dễ dàng hơn. Vì vậy, công thức **$\sin(\alpha) = AH / OA$** là công thức được sử dụng phổ biến nhất.

III. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Dạng cơ bản (chân đường cao có sẵn)

Đề bài: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) và $SA = a\sqrt{6}$.

- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD).
- Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD).

Lời giải:

a) Góc giữa SC và (ABCD):

- **Bước 1 (Giao điểm):** Giao điểm của SC và (ABCD) là điểm C.
- **Bước 2 (Hình chiếu):** Vì $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD).
- **Bước 3 (Xác định góc):** Hình chiếu của SC lên (ABCD) là đường thẳng AC. Vậy góc giữa SC và (ABCD) là góc SCA.

Tính toán:

Xét tam giác SAC vuông tại A:

- $SA = a\sqrt{6}$ (giả thiết).
- AC là đường chéo của hình vuông cạnh a, nên $AC = a\sqrt{2}$.
- Sử dụng tan: $\tan(\angle SCA) = SA / AC = (a\sqrt{6}) / (a\sqrt{2}) = \sqrt{3}$.
- Vậy, $\angle SCA = 60^\circ$.

b) Góc giữa SB và (ABCD):

- **Bước 1 (Giao điểm):** Giao điểm của SB và (ABCD) là điểm B.
- **Bước 2 (Hình chiếu):** A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD).
- **Bước 3 (Xác định góc):** Hình chiếu của SB lên (ABCD) là đường thẳng AB.
Vậy góc giữa SB và (ABCD) là góc SBA.

Tính toán:

Xét tam giác SAB vuông tại A:

- $SA = a\sqrt{6}$ (giả thiết).
- $AB = a$ (cạnh hình vuông).
- Sử dụng tan: $\tan(\angle SBA) = SA / AB = (a\sqrt{6}) / a = \sqrt{6}$.
- Vậy, $\angle SBA = \arctan(\sqrt{6})$.

Ví dụ 2: Hình chiếu không trùng với đỉnh

Đề bài: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC, biết tam giác SBC là tam giác đều.

Lời giải:

a) Tính góc giữa SA và mặt phẳng (ABC):

- **Bước 1 (Giao điểm):** Giao điểm của SA và (ABC) là điểm A.
- **Bước 2 (Hình chiếu):** Theo giả thiết, H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).
- **Bước 3 (Xác định góc):** Hình chiếu của SA lên (ABC) là đường thẳng AH.
Vậy góc giữa SA và (ABC) là góc SAH.

Tính toán:

Xét tam giác SAH vuông tại H:

- AH là đường cao của tam giác đều ABC cạnh a, nên $\mathbf{AH = (a\sqrt{3}) / 2}$.
- SH là đường cao của tam giác đều SBC cạnh a, nên $\mathbf{SH = (a\sqrt{3}) / 2}$.
- Sử dụng tan: $\mathbf{\tan(\angle SAH) = SH / AH = ((a\sqrt{3})/2) / ((a\sqrt{3})/2) = 1}$.
- Vậy, $\mathbf{\angle SAH = 45^\circ}$.

Ví dụ 3: Góc với mặt phẳng bên

Đề bài: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng A'C và mặt phẳng (ABC).

Lời giải:

- **Bước 1 (Giao điểm):** Giao điểm của A'C và mặt phẳng (ABC) là điểm C.

- **Bước 2 (Hình chiếu):** Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$. Do đó, A là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) .
- **Bước 3 (Xác định góc):** Hình chiếu của $A'C$ lên (ABC) là đường thẳng AC . Vậy góc giữa $A'C$ và (ABC) là góc $A'CA$.

Tính toán:

Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A :

- $A'A = 2a$ (giả thiết).
- Xét tam giác ABC vuông tại B , theo định lý Pytago: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$.
- Sử dụng tan: $\tan(\angle A'CA) = A'A / AC = 2a / 2a = 1$.
- Vậy, $\angle A'CA = 45^\circ$.

IV. Lưu ý quan trọng khi giải toán

- **Xác định đúng hình chiếu:** Đây là bước quan trọng nhất và cũng là bước dễ mắc sai lầm nhất. Cần nắm vững các tính chất vuông góc để tìm chân đường cao từ một điểm xuống mặt phẳng.
- **Vận dụng linh hoạt hệ thức lượng:** Luôn nhớ tam giác tạo bởi điểm, giao điểm và hình chiếu là một tam giác vuông. Từ đó, sử dụng các định lý Pytago, sin, cos, tan để tính toán độ dài các cạnh và số đo góc.
- **Góc luôn nhọn:** Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn có số đo từ 0° đến 90° . Nếu tính ra góc tù, bạn cần xem lại các bước xác định góc của mình.

- **Vẽ hình chính xác:** Một hình vẽ rõ ràng, trực quan sẽ giúp bạn dễ dàng xác định các yếu tố như giao điểm, hình chiếu và góc cần tìm.

VIDOCU.COM