

1. Định nghĩa đường Parabol

Trong mặt phẳng, cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F .

Định nghĩa: Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều điểm F và đường thẳng Δ được gọi là đường Parabol (P).

- Điểm F được gọi là **tiêu điểm** (focus) của Parabol.
- Đường thẳng Δ được gọi là **đường chuẩn** (directrix) của Parabol.
- Khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn được gọi là **tham số tiêu**, ký hiệu là p ($p > 0$).

Theo định nghĩa, điểm M thuộc Parabol (P) khi và chỉ khi: $MF = d(M, \Delta)$, trong đó $d(M, \Delta)$ là khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ .

2. Phương trình chính tắc của Parabol

Để xây dựng phương trình chính tắc của Parabol, ta chọn hệ tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ O là trung điểm của đoạn thẳng kẻ từ F vuông góc xuống Δ , và trục Ox trùng với đường thẳng đó.

a. Thiết lập phương trình

Giả sử ta có:

- Tiêu điểm F có tọa độ là $(p/2, 0)$.
- Đường chuẩn Δ có phương trình là $x = -p/2$ hay $x + p/2 = 0$.

Xét một điểm $M(x, y)$ bất kỳ thuộc Parabol (P). Theo định nghĩa, ta có $MF = d(M, \Delta)$.

- Khoảng cách $MF = \sqrt{(x - p/2)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$.
- Khoảng cách $d(M, \Delta) = |x + p/2|$.

Từ đó, ta có phương trình: $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$

Bình phương hai vế:

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2px$$

b. Phương trình chính tắc và các yếu tố

Phương trình $y^2 = 2px$ (với $p > 0$) được gọi là phương trình chính tắc của Parabol.

Với Parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px$:

- **Đỉnh:** Gốc tọa độ $O(0, 0)$.
- **Trục đối xứng:** Trục Ox (phương trình $y = 0$).
- **Tiêu điểm:** $F(p/2, 0)$.
- **Đường chuẩn:** Δ có phương trình $x = -p/2$.
- **Tham số tiêu:** p .
- Parabol nằm về bên phải trục Oy.

3. Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: Xác định tiêu điểm, đường chuẩn khi biết phương trình Parabol

Phương pháp: Từ phương trình chính tắc $y^2 = 2px$, ta tìm giá trị của tham số tiêu p . Sau đó, áp dụng công thức để tìm tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn.

Ví dụ 1: Cho Parabol (P) có phương trình $y^2 = 8x$. Xác định tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của (P).

Giải:

Ta có phương trình chính tắc của Parabol là $y^2 = 2px$.

Đối chiếu với phương trình $y^2 = 8x$, ta có $2p = 8 \Rightarrow p = 4$.

- Tọa độ tiêu điểm là $F(p/2, 0) = F(4/2, 0) = F(2, 0)$.
- Phương trình đường chuẩn là $\Delta: x = -p/2 = -4/2 = -2$.

Vậy, tiêu điểm là $F(2, 0)$ và đường chuẩn là $\Delta: x = -2$.

Ví dụ 2: Tìm tham số tiêu, tiêu điểm và đường chuẩn của Parabol (P): $y^2 = 5x$.

Giải:

Ta có $2p = 5 \Rightarrow p = 5/2$. Đây chính là tham số tiêu.

- Tọa độ tiêu điểm là $F(p/2, 0) = F((5/2)/2, 0) = F(5/4, 0)$.
- Phương trình đường chuẩn là $\Delta: x = -p/2 = -5/4$.

Dạng 2: Viết phương trình chính tắc của Parabol khi biết các yếu tố

Phương pháp: Phương trình chính tắc của Parabol có dạng $y^2 = 2px$. Ta cần tìm giá trị của p dựa vào các dữ kiện bài toán cho.

Ví dụ 1: Viết phương trình chính tắc của Parabol (P) biết tiêu điểm của nó là $F(3, 0)$.

Giải:

Parabol (P) có tiêu điểm $F(p/2, 0) = (3, 0)$.

Suy ra $p/2 = 3 \Rightarrow p = 6$.

Vậy phương trình chính tắc của Parabol (P) là $y^2 = 2 * 6 * x$ hay $y^2 = 12x$.

Ví dụ 2: Viết phương trình chính tắc của Parabol (P) biết đường chuẩn của nó là đường thẳng $\Delta: x = -1$.

Giải:

Parabol (P) có đường chuẩn $\Delta: x = -p/2 = -1$.

Suy ra $p/2 = 1 \Rightarrow p = 2$.

Vậy phương trình chính tắc của Parabol (P) là $y^2 = 2 * 2 * x$ hay $y^2 = 4x$.

Ví dụ 3: Viết phương trình chính tắc của Parabol (P) biết (P) đi qua điểm $M(2, -4)$.

Giải:

Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

Vì (P) đi qua điểm M(2, -4) nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình của (P). Ta thay $x = 2, y = -4$ vào phương trình:

$$(-4)^2 = 2p \cdot 2$$

$$16 = 4p$$

$$p = 4 \text{ (thỏa mãn } p > 0 \text{)}.$$

Vậy phương trình chính tắc của Parabol (P) là $y^2 = 8x$.

4. Bảng tổng hợp các dạng Parabol (Mở rộng)

Ngoài dạng chính tắc $y^2 = 2px$, Parabol còn có các dạng khác với đỉnh tại gốc tọa độ O(0,0).

Phương trình	Trục đối xứng	Bề lõm quay về	Tiêu điểm F	Đường chuẩn Δ
$y^2 = 2px \text{ (} p > 0 \text{)}$	Ox	Phải	$(p/2, 0)$	$x = -p/2$
$y^2 = -2px \text{ (} p > 0 \text{)}$	Ox	Trái	$(-p/2, 0)$	$x = p/2$
$x^2 = 2py \text{ (} p > 0 \text{)}$	Oy	Trên	$(0, p/2)$	$y = -p/2$
$x^2 = -2py \text{ (} p > 0 \text{)}$	Oy	Dưới	$(0, -p/2)$	$y = p/2$

5. Bài tập tự luyện

1. Xác định tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các Parabol sau:
 - a) $y^2 = 6x$
 - b) $y^2 = x$
2. Lập phương trình chính tắc của Parabol (P) trong các trường hợp sau:
 - a) (P) có tiêu điểm $F(5, 0)$.
 - b) (P) có đường chuẩn là $\Delta: x + 3 = 0$.
 - c) (P) đi qua điểm $A(1, -1)$.
3. Một cổng chào có hình dạng Parabol, chiều rộng ở chân cổng là 8m và chiều cao là 8m. Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh Parabol trùng với gốc tọa độ, trục đối xứng là trục Oy và bề lõm quay xuống dưới. Viết phương trình của Parabol đó.