

Chuyên đề: Bất đẳng thức tam giác và Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác

Đây là tài liệu tổng hợp toàn bộ kiến thức quan trọng trong chương trình Toán lớp 7 về các mối quan hệ giữa các yếu tố (cạnh, góc) trong một tam giác và bất đẳng thức tam giác. Nắm vững các kiến thức này là nền tảng để giải quyết nhiều dạng bài tập hình học phức tạp hơn.

I. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

Trong một tam giác, có một mối liên hệ chặt chẽ giữa độ lớn của góc và độ dài của cạnh đối diện với nó.

1. Định lý 1 (So sánh cạnh đối diện với góc lớn hơn)

Phát biểu: Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Giải thích: Xét tam giác ABC:

- Cạnh đối diện với góc A là cạnh BC.
- Cạnh đối diện với góc B là cạnh AC.
- Cạnh đối diện với góc C là cạnh AB.

Nếu ta có số đo các góc, ví dụ **Góc A > Góc B**, thì ta có thể suy ra độ dài cạnh đối diện tương ứng là **BC > AC**.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho tam giác ABC có số đo các góc là: Góc A = 80° , Góc B = 60° , Góc C = 40° . Hãy so sánh độ dài các cạnh của tam giác.

Giải:

Ta có: Góc A > Góc B > Góc C (vì $80^\circ > 60^\circ > 40^\circ$).

Áp dụng định lý, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

- Cạnh đối diện góc A là BC.
- Cạnh đối diện góc B là AC.
- Cạnh đối diện góc C là AB.

Vậy, ta có: **BC > AC > AB**.

2. **Ví dụ 2:** Cho tam giác MNP vuông tại M. So sánh cạnh NP và MN.

Giải:

Vì tam giác MNP vuông tại M nên Góc M = 90° . Trong một tam giác, tổng ba góc bằng 180° , nên góc M là góc lớn nhất (vì Góc N + Góc P = 90°).

- Cạnh đối diện góc M là NP (cạnh huyền).
- Cạnh đối diện góc P là MN (cạnh góc vuông).

Vì Góc M > Góc P, nên **NP > MN**. Tương tự, NP cũng lớn hơn MP.

2. Định lý 2 (Đảo - So sánh góc đối diện với cạnh lớn hơn)

Phát biểu: Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

Giải thích: Đây là định lý đảo của định lý 1. Nếu ta biết độ dài các cạnh, ta có thể so sánh số đo các góc. Nếu **cạnh BC > cạnh AC** thì **góc A > góc B**.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho tam giác DEF có $DE = 5 \text{ cm}$, $EF = 7 \text{ cm}$, $DF = 8 \text{ cm}$. Hãy so sánh các góc của tam giác.

Giải:

Ta có độ dài các cạnh: $DF > EF > DE$ (vì $8 \text{ cm} > 7 \text{ cm} > 5 \text{ cm}$).

Áp dụng định lý đảo:

- Góc đối diện cạnh DF là góc E.
- Góc đối diện cạnh EF là góc D.
- Góc đối diện cạnh DE là góc F.

Vậy, ta có: **Góc E > Góc D > Góc F.**

2. **Ví dụ 2:** Tam giác ABC có $AB = AC$ (tam giác cân tại A). So sánh góc B và góc C.

Giải:

Ta có hai cạnh $AB = AC$.

Theo định lý, nếu hai cạnh bằng nhau thì góc đối diện chúng cũng bằng nhau.

- Góc đối diện cạnh AB là góc C.
- Góc đối diện cạnh AC là góc B.

Vậy, **Góc B = Góc C**. Đây cũng chính là tính chất của tam giác cân.

II. Bất đẳng thức tam giác

Đây là một trong những kiến thức nền tảng và quan trọng nhất của hình học tam giác, cho biết điều kiện để ba đoạn thẳng có thể tạo thành một tam giác.

1. Định lý và Hệ quả

Định lý: Trong một tam giác, tổng độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng lớn hơn độ dài cạnh còn lại.

Hệ quả: Trong một tam giác, hiệu độ dài hai cạnh bất kỳ bao giờ cũng nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.

Công thức tổng quát: Với tam giác ABC có các cạnh là a, b, c ($a=BC, b=AC, c=AB$), ta luôn có:

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Giải thích: Để kiểm tra ba độ dài có tạo thành một tam giác hay không, ta chỉ cần so sánh độ dài lớn nhất với tổng hai độ dài còn lại. Nếu độ dài lớn nhất nhỏ hơn tổng hai độ dài kia, thì ba độ dài đó tạo thành một tam giác.

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Bộ ba đoạn thẳng nào sau đây có thể tạo thành một tam giác?

- a) 3 cm, 4 cm, 5 cm
- b) 2 cm, 3 cm, 6 cm

Giải:

a) Ta so sánh cạnh lớn nhất (5 cm) với tổng hai cạnh còn lại ($3 + 4 = 7$ cm).

Vì $5 < 7$, nên bộ ba đoạn thẳng **3 cm, 4 cm, 5 cm có thể tạo thành một tam giác** (đây là tam giác vuông).

b) Ta so sánh cạnh lớn nhất (6 cm) với tổng hai cạnh còn lại ($2 + 3 = 5$ cm).

Vì $6 > 5$, nên bộ ba đoạn thẳng **2 cm, 3 cm, 6 cm không thể tạo thành một tam giác.**

2. **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC có $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 7 \text{ cm}$. Tìm độ dài có thể có của cạnh BC, biết rằng độ dài này là một số nguyên.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức tam giác cho tam giác ABC, ta có:

$$|AC - AB| < BC < AC + AB$$

$$|7 - 4| < BC < 7 + 4$$

$$3 < BC < 11$$

Vì độ dài cạnh BC là một số nguyên, nên BC có thể nhận các giá trị: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (cm).**

III. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, đường xiên và hình chiếu

Các mối quan hệ này giúp so sánh độ dài các đoạn thẳng kẻ từ một điểm đến một đường thẳng.

1. Các khái niệm cơ bản

- **Đường vuông góc:** Đoạn thẳng AH kẻ từ điểm A và vuông góc với đường thẳng d tại H. H được gọi là **chân đường vuông góc**.
- **Đường xiên:** Đoạn thẳng AB kẻ từ điểm A đến một điểm B bất kỳ trên đường thẳng d (B không trùng H).
- **Hình chiếu:** Đoạn thẳng HB là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng d.

2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Định lý: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, **đường vuông góc là đường ngắn nhất.**

Giải thích: Nếu AH là đường vuông góc và AM là một đường xiên bất kỳ kẻ từ A đến đường thẳng d, ta luôn có **AH < AM**. Độ dài đoạn AH chính là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.

Ví dụ minh họa:

- Ví dụ 1:** Cho điểm M nằm ngoài đường thẳng a. Kẻ $MH \perp a$ tại H. Lấy điểm K bất kỳ trên đường thẳng a (K khác H). So sánh MH và MK.

Giải:

MH là đường vuông góc kẻ từ M đến a.

MK là đường xiên kẻ từ M đến a.

Theo định lý, đường vuông góc luôn ngắn hơn mọi đường xiên. Vậy, **MH < MK**.

3. Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của nó

Định lý: Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:

- a) Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.
- b) Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.
- c) Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau và ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

Giải thích: Xét điểm A nằm ngoài đường thẳng d, AH là đường vuông góc. Lấy hai điểm B, C trên d.

- AB, AC là các đường xiên.
- HB, HC là các hình chiếu tương ứng.

Ta có: **$AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$** và **$AB = AC \Leftrightarrow HB = HC$** .

Ví dụ minh họa:

1. **Ví dụ 1:** Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d. Kẻ $AH \perp d$. Trên d lấy hai điểm B và C sao cho $HB = 5 \text{ cm}$ và $HC = 3 \text{ cm}$. So sánh độ dài AB và AC.

Giải:

AB là đường xiên có hình chiếu là HB.

AC là đường xiên có hình chiếu là HC.

Vì $HB > HC$ ($5 \text{ cm} > 3 \text{ cm}$), nên đường xiên tương ứng cũng lớn hơn.

Vậy, **$AB > AC$** .

2. **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh $HB = HC$.

Giải:

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$.

Xét từ điểm A đến đường thẳng BC, ta có:

- AB và AC là hai đường xiên.
- HB và HC là hình chiếu tương ứng của AB và AC trên BC.

Vì hai đường xiên bằng nhau ($AB = AC$), nên hai hình chiếu của chúng cũng bằng nhau.

Vậy, **HB = HC**. Điều này chứng tỏ trong tam giác cân, đường cao cũng là đường trung tuyến.

VIDOCU.COM