

Tổng hợp kiến thức: Quan hệ giữa đường kính và dây cung

Trong hình học, đường tròn là một trong những hình cơ bản và quan trọng nhất. Các yếu tố của đường tròn như tâm, bán kính, đường kính, và dây cung có những mối quan hệ mật thiết với nhau. Chuyên đề này sẽ tập trung làm rõ mối quan hệ giữa đường kính và dây cung - hai khái niệm cốt lõi giúp giải quyết nhiều bài toán phức tạp.

1. So sánh độ dài của đường kính và dây cung

Trong một đường tròn, dây cung nào là dây cung lớn nhất? Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó.

Định lí 1:

Trong các dây của một đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

Công thức: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB bất kỳ. Ta luôn có: **$AB \leq 2R$** .

Giải thích:

- Nếu dây AB là đường kính thì $AB = 2R$.
- Nếu dây AB không phải là đường kính, ta xét tam giác OAB . Theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $AB < OA + OB = R + R = 2R$.
- Vậy, trong mọi trường hợp, độ dài dây cung luôn nhỏ hơn hoặc bằng độ dài đường kính. Dấu "=" xảy ra khi dây cung đó chính là đường kính.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) có bán kính 5cm. Một dây cung MN có độ dài 8cm. So sánh độ dài dây MN với đường kính của đường tròn.

Lời giải:

Đường kính của đường tròn (O) là $d = 2R = 2 * 5 = 10\text{cm}$.

Vì $8\text{cm} < 10\text{cm}$ nên độ dài dây MN nhỏ hơn độ dài đường kính.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O; 6cm) và điểm A nằm trên đường tròn. Tìm dây cung dài nhất đi qua điểm A.

Lời giải:

Theo định lí 1, dây cung dài nhất trong một đường tròn là đường kính.

Vậy, dây cung dài nhất đi qua điểm A chính là đường kính đi qua A.

Độ dài của dây cung này là $2R = 2 * 6 = 12\text{cm}$.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung

Mối quan hệ này là một trong những tính chất được ứng dụng nhiều nhất trong các bài toán chứng minh và tính toán liên quan đến đường tròn.

Định lí 2:

Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

Công thức: Cho đường tròn (O), đường kính CD và dây AB. Nếu $CD \perp AB$ tại I thì $IA = IB$.

Giải thích:

Xét tam giác OAB có $OA = OB = R$ (bán kính), nên tam giác OAB cân tại O .

Đường thẳng CD chứa đường kính đi qua O và vuông góc với AB tại I , nên OI là đường cao của tam giác cân OAB .

Trong tam giác cân, đường cao xuất phát từ đỉnh cũng đồng thời là đường trung tuyến. Do đó, I là trung điểm của AB , hay $IA = IB$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho đường tròn $(O; 10\text{cm})$ và dây $AB = 16\text{cm}$. Đường kính CD vuông góc với AB tại I . Tính độ dài IA và OI .

Lời giải:

Vì $CD \perp AB$ tại I , theo định lý 2, I là trung điểm của AB .

Do đó, $IA = IB = AB / 2 = 16 / 2 = 8\text{cm}$.

Xét tam giác vuông OIA , áp dụng định lý Pytago:

$$OA^2 = OI^2 + IA^2$$

$$10^2 = OI^2 + 8^2$$

$$100 = OI^2 + 64$$

$$OI^2 = 36 \Rightarrow OI = 6\text{cm}.$$

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) đường kính MN . Dây PQ vuông góc với MN tại H . Biết $HP = 3\text{cm}$ và $OH = 4\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn.

Lời giải:

Vì $MN \perp PQ$ tại H , nên H là trung điểm của PQ . Do đó $PQ = 2 * HP = 2 * 3 = 6\text{cm}$.

Nối O với P . Xét tam giác vuông OHP , ta có:

$$OP^2 = OH^2 + HP^2 \text{ (định lí Pytago)}$$

$$OP^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

$$OP = 5\text{cm}.$$

Vì OP là bán kính của đường tròn, vậy bán kính $R = 5\text{cm}$.

Định lí 3 (Định lí đảo):

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Công thức: Cho đường tròn (O), đường kính CD và dây AB không đi qua O. Nếu I là trung điểm của AB ($IA = IB$) và CD đi qua I thì **$CD \perp AB$** .

Giải thích:

Xét tam giác OAB có $OA = OB = R$, nên tam giác OAB cân tại O.

OI là đường trung tuyến (vì I là trung điểm AB).

Trong tam giác cân, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh cũng đồng thời là đường cao. Do đó, $OI \perp AB$. Vì đường kính CD chứa OI nên $CD \perp AB$.

Lưu ý: Trường hợp dây cung đi qua tâm (là đường kính) thì đường kính đi qua trung điểm của nó (là tâm O) không nhất thiết phải vuông góc với nó.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O; R) và dây MN. Gọi K là trung điểm của MN. Qua K vẽ đường kính PQ. Chứng minh $PQ \perp MN$.

Lời giải:

Vì K là trung điểm của dây MN và MN không đi qua tâm O (giả sử), đường kính PQ đi qua K.

Theo định lí 3, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Vậy $PQ \perp MN$ tại K.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

Khoảng cách từ tâm đến một dây là độ dài đoạn vuông góc kẻ từ tâm đến dây đó. Mỗi liên hệ này giúp chúng ta so sánh độ dài các dây cung dựa vào vị trí của chúng so với tâm.

Định lí 4:

a) Trong một đường tròn, hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

b) Trong một đường tròn, hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Công thức: Cho đường tròn (O) có hai dây AB và CD. Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB và CD.

- Nếu **AB = CD** thì **OH = OK**.

- Nếu **OH = OK** thì **AB = CD**.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O; 5cm). Hai dây song song AB và CD có độ dài bằng nhau và bằng 8cm. Tính khoảng cách giữa hai dây.

Lời giải:

Gọi H, K lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O đến AB và CD.

Vì $AB = CD = 8\text{cm}$, theo định lí 4, hai dây này cách đều tâm, tức là $OH = OK$.

Xét tam giác vuông OHA, ta có: $AH = AB/2 = 4\text{cm}$, $OA = 5\text{cm}$.

Áp dụng định lí Pytago: $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OH = 3\text{cm}$.

Do đó, $OK = 3\text{cm}$.

Vì $AB \parallel CD$, có hai trường hợp:

- O nằm giữa hai dây: Khoảng cách giữa hai dây là $HK = OH + OK = 3 + 3 = 6\text{cm}$.
- O nằm ngoài hai dây: Khoảng cách giữa hai dây là $HK = |OH - OK| = 0$ (trùng nhau, không thể xảy ra vì chúng song song và khác nhau). Nếu đề bài cho O nằm cùng phía thì khoảng cách là $|OH - OK|$. Trong trường hợp này, vì chúng song song và bằng nhau, chúng phải nằm về hai phía của tâm O.

Vậy khoảng cách giữa hai dây là 6cm.

Định lí 5:

a) Trong hai dây của một đường tròn, dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

b) Trong hai dây của một đường tròn, dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Công thức: Cho đường tròn (O) có hai dây AB và CD. Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB và CD.

- Nếu $AB > CD$ thì $OH < OK$.
- Nếu $OH < OK$ thì $AB > CD$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O; 10cm). Dây AB có khoảng cách đến tâm là 6cm. Dây CD có khoảng cách đến tâm là 8cm. So sánh độ dài hai dây AB và CD.

Lời giải:

Gọi OH và OK là khoảng cách từ tâm O đến hai dây AB và CD.

Ta có OH = 6cm và OK = 8cm.

Vì OH < OK (6cm < 8cm), theo định lí 5, dây gần tâm hơn thì lớn hơn.

Vậy AB > CD.

Bảng tóm tắt mối liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

Quan hệ về độ dài dây	Quan hệ về khoảng cách đến tâm
AB = CD	OH = OK
AB > CD	OH < OK
AB < CD	OH > OK

Các dạng bài tập vận dụng

Các định lí trên là công cụ mạnh mẽ để giải quyết nhiều dạng toán khác nhau.

1. Dạng 1: Tính toán độ dài

Phương pháp: Vận dụng định lí Pytago trong tam giác vuông tạo bởi tâm, trung điểm của dây và một đầu mút của dây. Sử dụng các định lí về quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

Bài tập ví dụ: Cho đường tròn (O; 13cm) và dây AB cách tâm O một khoảng 5cm. Tính độ dài dây AB.

Lời giải:

- Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến AB. Khi đó $OH = 5\text{cm}$ là khoảng cách từ O đến AB.
- Theo định lý 2, vì $OH \perp AB$ nên H là trung điểm của AB.
- Xét tam giác vuông OHA, có OA là bán kính ($OA = 13\text{cm}$) và OH là cạnh góc vuông ($OH = 5\text{cm}$).
- Áp dụng định lý Pytago: $OA^2 = OH^2 + AH^2$
 $13^2 = 5^2 + AH^2$
 $169 = 25 + AH^2$
 $AH^2 = 169 - 25 = 144$
 $AH = 12\text{cm}$.
- Vì H là trung điểm của AB nên $AB = 2 \cdot AH = 2 \cdot 12 = 24\text{cm}$.
- Vậy, độ dài dây AB là 24cm.

2. **Dạng 2: Chứng minh các tính chất hình học**

Phương pháp: Sử dụng các định lý đã học để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng vuông góc, hoặc các tính chất đối xứng.

Bài tập ví dụ: Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm bên trong đường tròn. Qua M, vẽ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ không đổi khi hai dây quay quanh M.

Lời giải:

- Kẻ đường kính PQ qua M. Ta có $AB \perp CD$ tại M.
- Vẽ dây A'B' song song với AB và đi qua tâm O. Vẽ dây C'D' song song với CD và đi qua tâm O. Khi đó A'B' và C'D' là hai đường kính vuông góc với nhau.
- Kẻ $OH \perp AB$ tại H, $OK \perp$

CD tại K. Tứ giác OHMK là hình chữ nhật (có 3 góc vuông).

- Ta có: $MA = AH - MH$, $MB = BH + MH$. Vì H là trung điểm AB nên $AH = BH$.

$$MA^2 + MB^2 = (AH - MH)^2 + (AH + MH)^2 = 2(AH^2 + MH^2).$$

- Tương tự: $MC^2 + MD^2 = 2(CK^2 + MK^2)$.

$$\text{- Vậy: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(AH^2 + MH^2 + CK^2 + MK^2).$$

- Vì OHMK là hình chữ nhật nên $MH = OK$, $MK = OH$.

- Thay vào, ta có: $2(AH^2 + OK^2 + CK^2 + OH^2)$.

- Trong tam giác vuông OHA: $AH^2 + OH^2 = OA^2 = R^2$.

- Trong tam giác vuông OKC: $CK^2 + OK^2 = OC^2 = R^2$.

- Vậy, tổng cần tìm là $2(R^2 + R^2) = 4R^2$.

- Vì R là bán kính không đổi, nên $4R^2$ không đổi. (đpcm)

3. Dạng 3: So sánh độ dài các dây cung

Phương pháp: Để so sánh hai dây, ta so sánh khoảng cách từ tâm đến hai dây đó. Dây nào gần tâm hơn thì lớn hơn.

Bài tập ví dụ: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết góc $A >$ góc $B >$ góc C . So sánh khoảng cách từ tâm O đến các cạnh BC, AC, AB.

Lời giải:

- Trong một đường tròn, góc nội tiếp đối diện với cạnh nào lớn hơn thì cạnh đó lớn hơn.

- Vì góc $A >$ góc $B >$ góc C , nên cạnh đối diện với các góc này cũng có quan hệ tương ứng: $BC > AC > AB$.

- Gọi OH, OK, OI lần lượt là khoảng cách từ tâm O đến các cạnh BC, AC, AB.

- Theo định lý về mối liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

- Vì $BC > AC$, nên dây BC gần tâm hơn dây AC. Do đó, $OH < OK$.

- Vì $AC > AB$, nên dây AC gần tâm hơn dây AB. Do đó, $OK < OI$.

- Kết hợp lại, ta có: $OH < OK < OI$.

- Vậy, khoảng cách từ tâm O đến cạnh BC là nhỏ nhất, và khoảng cách đến cạnh AB là lớn nhất.

VIDOCU.COM