

Chuyên đề: Nguyên Hàm Bằng Phương Pháp Từng Phần

Phần

Phương pháp tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần là một trong hai phương pháp cơ bản để giải quyết các bài toán nguyên hàm, tích phân phức tạp, đặc biệt là các bài toán chứa tích của hai loại hàm số khác nhau.

1. Cơ sở lý thuyết và công thức nguyên hàm từng phần

Phương pháp này xuất phát từ công thức đạo hàm của một tích hai hàm số $u(x)$ và $v(x)$:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có:

$$\int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx$$

$$\Leftrightarrow uv = \int v du + \int u dv$$

Từ đó, ta suy ra công thức tính nguyên hàm từng phần:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

- **Mục tiêu:** Chuyển việc tính nguyên hàm $\int u dv$ (phức tạp) về việc tính nguyên hàm $\int v du$ (đơn giản hơn).
- **Chìa khóa thành công:** Nằm ở việc chọn **u** và **dv** một cách hợp lý.

2. Phương pháp đặt u và dv

Để áp dụng công thức thành công, ta cần chọn u và $dv = f(x)dx$ sao cho:

- dv phải dễ dàng tìm được nguyên hàm v .
- Nguyên hàm $\int v du$ phải đơn giản hơn hoặc dễ tính hơn nguyên hàm ban đầu $\int u dv$.

a. Quy tắc ưu tiên đặt u

Ta thường dùng quy tắc ghi nhớ thứ tự ưu tiên khi đặt u như sau:

"Nhất Lốc, Nhì Đa, Tam Lượng, Tứ Mũ"

1. **(Lốc) Logarit:** Các hàm chứa $\ln(x)$, $\log_a(x)$.
2. **(Đa) Đa thức:** Các hàm đa thức $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$
3. **(Lượng) Lượng giác:** Các hàm $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$.
4. **(Mũ) Mũ:** Các hàm e^x , a^x .

Hàm số nào xuất hiện trước trong thứ tự trên thì ưu tiên đặt làm u . Phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân (bao gồm cả dx) sẽ là dv .

3. Các dạng toán cơ bản

Dạng 1: Nguyên hàm của $P(x) \cdot \ln(ax+b)$

Phương pháp: Đặt $u = \ln(ax+b)$ và $dv = P(x)dx$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int x \ln(x) dx$

- Đặt $u = \ln(x) \Rightarrow du = (1/x) dx$

- Đặt $dv = x \, dx \Rightarrow v = x^2/2$

Áp dụng công thức:

$$I = uv - \int v \, du = (x^2/2)\ln(x) - \int (x^2/2)(1/x)dx = (x^2/2)\ln(x) - \int (x/2)dx$$

$$I = (x^2/2)\ln(x) - x^2/4 + C$$

Ví dụ 2: Tính $J = \int (2x + 1)\ln(x) \, dx$

- Đặt $u = \ln(x) \Rightarrow du = (1/x) \, dx$
- Đặt $dv = (2x + 1) \, dx \Rightarrow v = x^2 + x$

Áp dụng công thức:

$$J = (x^2 + x)\ln(x) - \int (x^2 + x)(1/x)dx = (x^2 + x)\ln(x) - \int (x + 1)dx$$

$$J = (x^2 + x)\ln(x) - (x^2/2 + x) + C$$

Dạng 2: Nguyên hàm của $P(x) \cdot e^{ax+b}$

Phương pháp: Đặt $u = P(x)$ và $dv = e^{ax+b}dx$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int x e^x \, dx$

- Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$
- Đặt $dv = e^x \, dx \Rightarrow v = e^x$

Áp dụng công thức:

$$I = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C$$

Dạng 3: Nguyên hàm của $P(x) \cdot \sin(ax+b)$ hoặc $P(x) \cdot \cos(ax+b)$

Phương pháp: Đặt $u = P(x)$ và $dv = \sin(ax+b)dx$ hoặc $dv = \cos(ax+b)dx$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int x \cos(x) dx$

- Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$
- Đặt $dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x)$

Áp dụng công thức:

$$I = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) - (-\cos(x)) + C = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

4. Các dạng toán nâng cao và kỹ thuật đặc biệt

a. Nguyên hàm từng phần luân hồi (lặp lại)

Dạng này xảy ra khi tính nguyên hàm của tích hai hàm lượng giác và hàm mũ, ví dụ: $\int e^{ax} \sin(bx) dx$. Sau khi từng phần 2 lần, nguyên hàm ban đầu sẽ xuất hiện lại.

Phương pháp: Đặt I là nguyên hàm cần tính. Từng phần 2 lần, ta sẽ có một phương trình chứa I , từ đó giải tìm I .

Ví dụ: Tính $I = \int e^x \cos(x) dx$

Lần 1:

- Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$
- Đặt $dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x)$

$$I = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - J$$

Lần 2 (Tính $J = \int e^x \sin(x) dx$):

- Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

- Đặt $dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x)$

$$J = -e^x \cos(x) - \int (-\cos(x))e^x dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx = -e^x \cos(x) + I$$

Thay J vào biểu thức của I:

$$I = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I)$$

$$I = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - I$$

$$2I = e^x (\sin(x) + \cos(x))$$

$$\text{Vậy, } I = (e^x/2)(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

b. Phương pháp tính nhanh (Phương pháp múa cột / Sơ đồ chéo)

Phương pháp này áp dụng hiệu quả cho dạng $\int P(x)f(x)dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức và $f(x)$ là hàm dễ lấy nguyên hàm nhiều lần (e^{ax} , $\sin(ax)$, $\cos(ax)$).

Cách thực hiện:

1. Lập bảng gồm 2 cột: Cột 1 (U) để lấy đạo hàm, Cột 2 (dV) để lấy nguyên hàm.
2. Viết $P(x)$ vào cột U và $f(x)$ vào cột dV.
3. Lấy đạo hàm liên tiếp ở cột U cho đến khi bằng 0.
4. Lấy nguyên hàm liên tiếp ở cột dV với số lần tương ứng.
5. Kết quả là tổng các tích chéo từ trên xuống, với dấu đan xen (+, -, +, -, ...).

Ví dụ: Tính $I = \int x^2 e^x dx$

Dấu	U (Đạo hàm)	dV (Nguyên hàm)
+	x^2	e^x
-	$2x$	e^x
+	2	e^x
-	0	e^x

Nhân chéo và lấy tổng theo dấu:

$$I = (+x^2)(e^x) - (2x)(e^x) + (2)(e^x) + C$$

$$I = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

c. Dạng ẩn, phải biến đổi trước khi từng phần

Một số hàm số không có dạng tích rõ ràng nhưng vẫn có thể áp dụng phương pháp từng phần bằng cách coi dx là dv .

Ví dụ: Tính $I = \int \ln(x) dx$

Ta xem đây là tích của $\ln(x)$ và 1 .

- Đặt $u = \ln(x) \Rightarrow du = (1/x) dx$
- Đặt $dv = dx \Rightarrow v = x$

Áp dụng công thức:

$$I = x \ln(x) - \int x(1/x)dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + C$$

d. Nguyên hàm truy hồi

Đây là dạng toán tìm mối liên hệ giữa nguyên hàm I_n và I_{n-1} hoặc I_{n-2} .

Ví dụ: Cho $I_n = \int \sin^n(x) dx$. Tìm hệ thức liên hệ giữa I_n và I_{n-2} .

Ta viết $I_n = \int \sin^{n-1}(x) \sin(x) dx$.

- Đặt $u = \sin^{n-1}(x) \Rightarrow du = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x) dx$
- Đặt $dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x)$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) - \int (-\cos(x))(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x) dx$$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \cos^2(x)\sin^{n-2}(x) dx$$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int (1-\sin^2(x))\sin^{n-2}(x) dx$$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\left[\int \sin^{n-2}(x) dx - \int \sin^n(x) dx\right]$$

$$I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2}$$

$$n I_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)I_{n-2}$$

Đây chính là công thức truy hồi cần tìm.

5. Bài tập vận dụng

1. Tính $I = \int x^2 \ln(x) dx$

2. Tính $I = \int (x+1)\sin(2x) dx$

3. Tính $I = \int e^{2x}\sin(3x) dx$ (Dạng luân hồi)

4. Tính $I = \int x^3 e^x dx$ (Dùng phương pháp múa cột)

5. Tính $I = \int \arctan(x) dx$ (Dạng ẩn)

6. Tính $I = \int (\ln(x)/x^3) dx$

VIDOCU.COM