

Tổng hợp kiến thức về Đạo hàm của các hàm số lượng giác

Chuyên đề này cung cấp đầy đủ các công thức và ví dụ về đạo hàm của các hàm số lượng giác cơ bản ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$) và các hàm số hợp tương ứng. Đây là một phần kiến thức quan trọng trong chương trình Toán lớp 11, là nền tảng cho việc khảo sát hàm số và giải các bài toán liên quan.

1. Đạo hàm của hàm số $y = \sin(x)$

a. Hàm số cơ bản $y = \sin(x)$

Công thức: $(\sin x)' = \cos x$

Giải thích: Đạo hàm của hàm số $\sin(x)$ theo biến x là hàm số $\cos(x)$. Điều này có nghĩa là tại mỗi điểm trên đồ thị hàm số $\sin(x)$, tốc độ thay đổi (hay hệ số góc của tiếp tuyến) tại điểm đó bằng giá trị của hàm số $\cos(x)$ tại cùng điểm đó.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 3\sin(x)$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của một hằng số nhân với một hàm:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x).$$

Ta có: $y' = (3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 + \sin(x)$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của một tổng: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Ta có: $y' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

b. Hàm hợp $y = \sin(u)$ với $u = u(x)$

Công thức: $(\sin u)' = u' * \cos u$

Giải thích: Đây là quy tắc chuỗi (chain rule) áp dụng cho hàm sin. Để lấy đạo hàm của $\sin(u)$, ta lấy đạo hàm của hàm bên trong (u') rồi nhân với đạo hàm của hàm bên ngoài ($\cos$) theo biến u .

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(5x)$.

Lời giải: Ở đây, $u = 5x$. Do đó, $u' = (5x)' = 5$.

Áp dụng công thức, ta có: $y' = (\sin(5x))' = (5x)' * \cos(5x) = 5\cos(5x)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^3 - 2x + 1)$.

Lời giải: Đặt $u = x^3 - 2x + 1$. Ta có $u' = (x^3 - 2x + 1)' = 3x^2 - 2$.

Áp dụng công thức, ta có: $y' = u' * \cos u = (3x^2 - 2)\cos(x^3 - 2x + 1)$.

- **Ví dụ 3:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\sqrt{x})$.

Lời giải: Đặt $u = \sqrt{x}$. Ta có $u' = (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.

Áp dụng công thức: $y' = u' * \cos u = (1/(2\sqrt{x})) * \cos(\sqrt{x})$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \cos(x)$

a. Hàm số cơ bản $y = \cos(x)$

Công thức: $(\cos x)' = -\sin x$

Giải thích: Đạo hàm của hàm số $\cos(x)$ là hàm số $-\sin(x)$. Chú ý dấu âm trong công thức.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = -4\cos(x)$.

Lời giải: $y' = (-4\cos x)' = -4(\cos x)' = -4(-\sin x) = 4\sin x$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(x) - 3x$.

Lời giải: $y' = (\cos x - 3x)' = (\cos x)' - (3x)' = -\sin x - 3$.

b. Hàm hợp $y = \cos(u)$ với $u = u(x)$

Công thức: $(\cos u)' = -u' * \sin u$

Giải thích: Tương tự như hàm sin, ta áp dụng quy tắc chuỗi. Lấy đạo hàm của hàm bên trong (u') nhân với đạo hàm của hàm bên ngoài theo biến u ($-\sin u$).

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(2x + \pi/3)$.

Lời giải: Đặt $u = 2x + \pi/3$. Ta có $u' = (2x + \pi/3)' = 2$.

Áp dụng công thức: $y' = -u' * \sin u = -2\sin(2x + \pi/3)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(1/x)$.

Lời giải: Đặt $u = 1/x = x^{-1}$. Ta có $u' = (x^{-1})' = -1 * x^{-2} = -1/x^2$.

Áp dụng công thức: $y' = -u' * \sin u = -(-1/x^2) * \sin(1/x) = (1/x^2)\sin(1/x)$.

3. Đạo hàm của hàm số $y = \tan(x)$

a. Hàm số cơ bản $y = \tan(x)$

Công thức: $(\tan x)' = 1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x$

Giải thích: Hàm số $y = \tan(x)$ có tập xác định là $x \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Đạo hàm của nó có thể được biểu diễn theo hai dạng tương đương. Dạng $1/\cos^2 x$ thường dùng trong tính toán, dạng $1 + \tan^2 x$ hữu ích khi biến đổi biểu thức.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\tan(x) - 1$.

Lời giải: $y' = (2\tan x - 1)' = 2(\tan x)' - (1)' = 2 * (1/\cos^2 x) - 0 = 2/\cos^2 x$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x * \tan(x)$.

Lời giải: Áp dụng quy tắc đạo hàm của một tích $(uv)' = u'v + uv'$.

$$y' = (x)' * \tan(x) + x * (\tan(x))' = 1 * \tan(x) + x * (1/\cos^2 x) = \tan(x) + x/\cos^2 x.$$

b. Hàm hợp $y = \tan(u)$ với $u = u(x)$

Công thức: $(\tan u)' = u' / \cos^2 u$

Giải thích: Áp dụng quy tắc chuỗi. Lấy đạo hàm của hàm bên trong (u') rồi chia cho bình phương của $\cos(u)$.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan(3x)$.

Lời giải: Đặt $u = 3x$, suy ra $u' = 3$.

Áp dụng công thức: $y' = u'/\cos^2 u = 3/\cos^2(3x)$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan(\sin x)$.

Lời giải: Đặt $u = \sin x$, suy ra $u' = \cos x$.

Áp dụng công thức: $y' = u'/\cos^2 u = \cos x / \cos^2(\sin x)$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \cot(x)$

a. Hàm số cơ bản $y = \cot(x)$

Công thức: $(\cot x)' = -1 / \sin^2 x = -(1 + \cot^2 x)$

Giải thích: Hàm số $y = \cot(x)$ có tập xác định là $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Tương tự như $\tan(x)$, đạo hàm của $\cot(x)$ cũng có hai dạng biểu diễn và có dấu âm.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = 5\cot(x) + 2x^2$.

Lời giải: $y' = (5\cot x + 2x^2)' = 5(\cot x)' + (2x^2)' = 5 * (-1/\sin^2 x) + 4x = -5/\sin^2 x + 4x$.

- **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x) * \cot(x)$.

Lời giải: Ta có thể rút gọn trước khi tính đạo hàm: $y = \sin(x) * (\cos(x)/\sin(x)) = \cos(x)$.

Vậy $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

b. Hàm hợp $y = \cot(u)$ với $u = u(x)$

Công thức: $(\cot u)' = -u' / \sin^2 u$

Giải thích: Áp dụng quy tắc chuỗi. Lấy đạo hàm của hàm bên trong (u'), đổi dấu, rồi chia cho bình phương của $\sin(u)$.

Ví dụ minh họa:

- **Ví dụ 1:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot(x/2)$.

Lời giải: Đặt $u = x/2$, suy ra $u' = 1/2$.

Áp dụng công thức: $y' = -u'/\sin^2 u = -(1/2)/\sin^2(x/2) = -1/(2\sin^2(x/2))$.

• **Ví dụ 2:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot(e^x)$.

Lời giải: Đặt $u = e^x$, suy ra $u' = e^x$.

Áp dụng công thức: $y' = -u'/\sin^2 u = -e^x/\sin^2(e^x)$.

5. Bảng tổng hợp công thức đạo hàm hàm số lượng giác

Hàm số cơ bản	Hàm hợp ($u = u(x)$)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' * \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' * \sin u$
$(\tan x)' = 1/\cos^2 x$	$(\tan u)' = u'/\cos^2 u$
$(\cot x)' = -1/\sin^2 x$	$(\cot u)' = -u'/\sin^2 u$

6. Ví dụ vận dụng tổng hợp

Các ví dụ sau kết hợp các công thức đạo hàm lượng giác với các quy tắc đạo hàm của tích, thương và hàm hợp phức tạp.

Ví dụ 1: Áp dụng quy tắc đạo hàm của tích

Tính đạo hàm của hàm số $y = e^x * \cos(2x)$.

Lời giải:

Áp dụng quy tắc đạo hàm của tích $(uv)' = u'v + uv'$ với $u = e^x$ và $v = \cos(2x)$.

1. Tính đạo hàm của từng thành phần:

◦ $u' = (e^x)' = e^x$

$$\circ v' = (\cos(2x))' = -(2x)' * \sin(2x) = -2\sin(2x)$$

$$2. \text{ Thay vào công thức: } y' = (e^x)' * \cos(2x) + e^x * (\cos(2x))'$$

$$3. y' = e^x * \cos(2x) + e^x * (-2\sin(2x))$$

$$4. y' = e^x(\cos(2x) - 2\sin(2x))$$

Ví dụ 2: Áp dụng quy tắc đạo hàm của thương

Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x) / (x + 1)$.

Lời giải:

Áp dụng quy tắc đạo hàm của thương $(u/v)' = (u'v - uv') / v^2$ với $u = \sin(x)$ và $v = x + 1$.

1. Tính đạo hàm của từng thành phần:

$$\circ u' = (\sin x)' = \cos x$$

$$\circ v' = (x + 1)' = 1$$

$$2. \text{ Thay vào công thức: } y' = [(\sin x)' * (x + 1) - \sin(x) * (x + 1)'] / (x + 1)^2$$

$$3. y' = [\cos(x) * (x + 1) - \sin(x) * 1] / (x + 1)^2$$

$$4. y' = ((x + 1)\cos(x) - \sin(x)) / (x + 1)^2$$

Ví dụ 3: Áp dụng quy tắc chuỗi nhiều lớp

Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(4x)$.

Lời giải:

Hàm số này có thể viết lại là $y = [\cos(4x)]^3$. Đây là một hàm hợp nhiều lớp. Ta xem nó là hàm u^3 với $u = \cos(4x)$.

1. Áp dụng công thức $(u^3)' = 3u^2 * u'$:

$$y' = 3[\cos(4x)]^2 * (\cos(4x))'$$

2. Tiếp tục tính đạo hàm của $u = \cos(4x)$. Đây lại là một hàm hợp.

$$(\cos(4x))' = -(4x)' * \sin(4x) = -4\sin(4x)$$

3. Thay kết quả vào bước 1:

$$y' = 3\cos^2(4x) * [-4\sin(4x)]$$

4. Rút gọn biểu thức:

$$y' = -12\cos^2(4x)\sin(4x)$$