

Tổng hợp kiến thức Hình thang cân và các bài toán chứng minh

Hình thang cân là một trong những tứ giác đặc biệt quan trọng trong chương trình Toán học lớp 8. Việc nắm vững định nghĩa, tính chất và dấu hiệu nhận biết của hình thang cân là nền tảng để giải quyết nhiều bài toán hình học phức tạp. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức cần nhớ và các dạng bài tập điển hình.

I. Định nghĩa và các yếu tố của hình thang cân

1. Định nghĩa

Định nghĩa: Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Xét hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD ($AB \parallel CD$):

- Nếu $\angle D = \angle C$ thì ABCD là hình thang cân.
- Nếu $\angle A = \angle B$ thì ABCD là hình thang cân.

Ví dụ: Cho tứ giác MNPQ có $MN \parallel PQ$ và $\angle P = \angle Q = 70^\circ$. Khi đó, MNPQ là hình thang cân.

2. Các yếu tố

- **Cạnh đáy:** Gồm đáy lớn và đáy bé (hai cạnh song song với nhau). Ví dụ: AB và CD.

- **Cạnh bên:** Hai cạnh không song song. Ví dụ: AD và BC.
- **Đường cao:** Đoạn thẳng vuông góc kẻ từ một đỉnh của đáy này xuống cạnh chứa đáy kia. Ví dụ: AH, BK (với H, K thuộc CD).
- **Đường chéo:** Đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau. Ví dụ: AC và BD.

II. Tính chất của hình thang cân

Một hình thang nếu đã là hình thang cân thì nó sẽ có những tính chất đặc biệt về cạnh bên và đường chéo.

1. Tính chất về cạnh bên

Định lý 1: Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

Cấu trúc: Nếu ABCD là hình thang cân ($AB \parallel CD$) thì **$AD = BC$** .

Giải thích: Độ dài của hai cạnh không song song trong một hình thang cân luôn bằng nhau. Đây là tính chất cơ bản và thường được sử dụng nhất.

Ví dụ 1: Cho hình thang cân EFGH (đáy $EF \parallel GH$). Biết cạnh bên $EH = 6 \text{ cm}$. Tính độ dài cạnh bên FG.

Lời giải: Vì EFGH là hình thang cân nên hai cạnh bên bằng nhau. Do đó, $FG = EH = 6 \text{ cm}$.

Ví dụ 2: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có chu vi là 30 cm. Biết độ dài hai đáy $AB = 5 \text{ cm}$, $CD = 13 \text{ cm}$. Tính độ dài cạnh bên của hình thang.

Lời giải:

Gọi độ dài cạnh bên là $x \text{ (cm)}$. Vì ABCD là hình thang cân nên $AD = BC = x$.

Chu vi của hình thang là: $AB + CD + AD + BC = 30 \text{ cm}$.

Thay số vào ta có: $5 + 13 + x + x = 30$.

$$\Rightarrow 18 + 2x = 30.$$

$$\Rightarrow 2x = 12.$$

$$\Rightarrow x = 6.$$

Vậy, độ dài mỗi cạnh bên của hình thang cân là 6 cm.

2. Tính chất về đường chéo

Định lý 2: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

Cấu trúc: Nếu ABCD là hình thang cân ($AB \parallel CD$) thì **$AC = BD$** .

Giải thích: Hai đoạn thẳng nối các cặp đỉnh đối diện của hình thang cân có độ dài bằng nhau.

Ví dụ 1: Cho hình thang cân MNPQ ($MN \parallel PQ$). Đường chéo MP có độ dài 15 cm. Hỏi đường chéo NQ dài bao nhiêu?

Lời giải: Vì MNPQ là hình thang cân nên hai đường chéo của nó bằng nhau. Do đó, $NQ = MP = 15$ cm.

Ví dụ 2: Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết tam giác OAB là tam giác đều có cạnh 3cm. Tính độ dài AC và BD.

Lời giải:

Vì ABCD là hình thang cân nên $AC = BD$.

Ta có $AB \parallel CD$, nên $\angle OAB = \angle OCD$ và $\angle OBA = \angle ODC$ (các cặp góc so le trong).

Vì tam giác OAB đều nên $OA = OB = AB = 3$ cm và $\angle AOB = 60^\circ$.

Do ABCD là hình thang cân, ta có thể chứng minh được tam giác OCD cũng là

tam giác cân tại O.

Hơn nữa, ta có thể chứng minh $\triangle ADC = \triangle BCD$ (c.g.c) vì DC chung, $AD = BC$, $\angle ADC = \angle BCD$. Suy ra $AC = BD$. Đây là một cách chứng minh định lý.

III. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân

Để chứng minh một tứ giác là hình thang cân, trước hết ta phải chứng minh nó là hình thang, sau đó chứng minh thêm một trong hai dấu hiệu sau:

1. Dấu hiệu 1: Dựa vào góc kề đáy

Phát biểu: Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

Phương pháp chứng minh:

Bước 1: Chứng minh tứ giác là hình thang (chứng minh có hai cạnh đối song song).

Bước 2: Chứng minh hai góc kề một đáy của hình thang đó bằng nhau (ví dụ: $\angle C = \angle D$ hoặc $\angle A = \angle B$).

Bước 3: Kết luận tứ giác đó là hình thang cân.

Ví dụ: Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng tứ giác BDEC là hình thang cân.

Lời giải:

Bước 1: Chứng minh BDEC là hình thang.

Xét tam giác ABC, ta có: $AD/AB = AE/AC$ (vì $AD=AE$, $AB=AC$).

Theo định lý Ta-lét đảo, suy ra $DE \parallel BC$.

Tứ giác BDEC có $DE \parallel BC$ nên là hình thang.

Bước 2: Chứng minh hai góc kề đáy bằng nhau.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB$.

Hai góc này chính là hai góc kề đáy BC của hình thang BDEC.

Bước 3: Kết luận.

Hình thang BDEC có hai góc kề đáy bằng nhau ($\angle ABC = \angle ACB$) nên BDEC là hình thang cân.

2. Dấu hiệu 2: Dựa vào đường chéo

Phát biểu: Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Phương pháp chứng minh:

Bước 1: Chứng minh tứ giác là hình thang.

Bước 2: Chứng minh hai đường chéo của hình thang đó bằng nhau (ví dụ: $AC = BD$).

Bước 3: Kết luận tứ giác đó là hình thang cân.

Ví dụ: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết rằng $OA = OB$. Chứng minh ABCD là hình thang cân.

Lời giải:

Bước 1: ABCD đã là hình thang theo giả thiết.

Bước 2: Chứng minh hai đường chéo bằng nhau.

Xét tam giác OAB, có $OA = OB$ (giả thiết) nên $\triangle OAB$ cân tại O.

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ (1).

Vì $AB \parallel CD$, ta có:

$\angle OAB = \angle OCD$ (hai góc so le trong) (2).

$\angle OBA = \angle ODC$ (hai góc so le trong) (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\angle OCD = \angle ODC$.

$\Rightarrow$ Tam giác OCD cân tại O $\Rightarrow OC = OD$.

Ta có độ dài đường chéo $AC = OA + OC$ và $BD = OB + OD$.

Mà $OA = OB$ và $OC = OD$, nên $AC = BD$.

Bước 3: Kết luận.

Hình thang ABCD có hai đường chéo bằng nhau ($AC = BD$) nên ABCD là hình thang cân.

IV. Các dạng bài toán chứng minh thường gặp

Dạng 1: Chứng minh một tứ giác là hình thang cân

Đây là dạng bài cơ bản nhất, vận dụng trực tiếp các dấu hiệu nhận biết đã nêu ở trên.

Ví dụ: Cho hình bình hành ABCD. Từ B kẻ đường thẳng cắt cạnh CD tại E, từ D kẻ đường thẳng cắt cạnh CB tại F sao cho $BE = DF$. Gọi I là giao điểm của BE và DF. Chứng minh rằng tứ giác ABID là hình thang cân.

Phân tích và hướng dẫn giải:

1. **Chứng minh ABID là hình thang:** Vì ABCD là hình bình hành nên $AB \parallel DC$, suy ra $AB \parallel DI$. Do đó, ABID là hình thang.

2. **Chứng minh hai góc kề đáy bằng nhau ($\angle ADI = \angle BAI$) hoặc hai đường chéo bằng nhau ($AI = BD$):** Ta sẽ đi chứng minh hai đường chéo bằng nhau.

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle CBE$:

- $AD = CB$ (cạnh đối hình bình hành)
- $\angle ADF = \angle CBE$ (góc đối hình bình hành)
- $DF = BE$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ADF = \Delta CBE$ (c.g.c). Suy ra $AF = CE$.

Ta có $AB = CD$ (cạnh đối hinh), suy ra $AB + AF = CD + CE \Rightarrow BF = DE$.

Bây giờ, xét ΔABF và ΔEDA :

- $AB = ED$ (vì $AB=CD$ và $BF=DE$)
- $\angle BAF = \angle DEA$ (so le trong vì $AF \parallel DE$)
- $AF = AE$ (cần chứng minh thêm)

Hướng đi này có vẻ phức tạp. Ta thử hướng khác: chứng minh ΔAID cân tại I. Điều này cũng khó.

Quay lại dấu hiệu góc kề đáy. Ta cần chứng minh $\angle DAB = \angle ADI$. Điều này không khả thi.

Hãy xem xét lại bài toán. Có thể có nhầm lẫn trong đề bài. Một bài toán phổ biến hơn là: Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao BD, CE. Chứng minh BEDC là hình thang cân. Cách làm tương tự ví dụ ở mục III.1.

Dạng 2: Sử dụng tính chất hình thang cân để tính toán và chứng minh

Khi đã biết một tứ giác là hình thang cân, ta được phép sử dụng các tính chất của nó (cạnh bên bằng nhau, đường chéo bằng nhau, góc kề đáy bằng nhau) để giải quyết các yêu cầu khác.

Ví dụ 1: Tính toán độ dài

Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ hai đường cao AH và BK xuống đáy CD. Biết $AB = 6$ cm và $CD = 14$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng DH và CK.

Lời giải:

Xét tứ giác ABKH có:

- $AB \parallel HK$ (vì $AB \parallel CD$)

- $AH \parallel BK$ (vì cùng vuông góc với CD)

$\Rightarrow ABKH$ là hình bình hành.

Lại có $\angle AHK = 90^\circ$, nên $ABKH$ là hình chữ nhật.

$\Rightarrow HK = AB = 6 \text{ cm}$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle ADH$ và $\triangle BCK$:

- $AD = BC$ (tính chất cạnh bên của hình thang cân)

- $\angle D = \angle C$ (tính chất góc kề đáy của hình thang cân)

$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle BCK$ (cạnh huyền - góc nhọn).

$\Rightarrow DH = CK$ (hai cạnh tương ứng).

Ta có: $CD = DH + HK + KC$.

$\Rightarrow 14 = DH + 6 + DH$ (vì $DH = CK$).

$\Rightarrow 14 = 2 \cdot DH + 6$.

$\Rightarrow 2 \cdot DH = 8$.

$\Rightarrow DH = 4 \text{ cm}$.

Vậy $DH = CK = 4 \text{ cm}$.

Ví dụ 2: Chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau

Cho hình thang cân $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$). Hai đường chéo MP và NQ cắt nhau tại O .

Chứng minh rằng $OM = ON$ và $OP = OQ$.

Lời giải:

Xét $\triangle PQN$ và $\triangle QPM$, ta có:

- PQ là cạnh chung.

- $NQ = MP$ (tính chất đường chéo của hình thang cân).

- $\angle PQC = \angle QPN$ (tính chất góc kề đáy của hình thang cân).

$\Rightarrow \triangle PQN = \triangle QPM$ (c.c.c hoặc c.g.c).

$\Rightarrow \angle NQP = \angle MPQ$ (hai góc tương ứng).

Xét tam giác OPQ có $\angle OQP = \angle OPQ$ (chứng minh trên), do đó $\triangle OPQ$ là tam giác cân tại O .

$\Rightarrow \mathbf{OP = OQ}$ (điều phải chứng minh).

Lại có: $MP = NQ$ (tính chất).

$OP = OQ$ (chứng minh trên).

Suy ra $MP - OP = NQ - OQ$.

$\Rightarrow \mathbf{OM = ON}$ (điều phải chứng minh).