

Tổng hợp kiến thức về Thể tích khối tròn xoay quanh trục Oy

Trong chương trình Giải tích lớp 12, bài toán tính thể tích khối tròn xoay là một dạng toán ứng dụng quan trọng của tích phân. Bên cạnh việc quay hình phẳng quanh trục Ox, việc quay hình phẳng quanh trục Oy cũng thường xuất hiện trong các bài kiểm tra và đề thi. Tài liệu này sẽ tổng hợp đầy đủ các công thức và phương pháp giải quyết dạng toán này.

I. Nguyên tắc chung khi tính thể tích khối tròn xoay quanh trục Oy

Điểm khác biệt cơ bản nhất so với bài toán quay quanh trục Ox là:

- **Biến số:** Mọi hàm số phải được biểu diễn theo biến y , tức là có dạng $x = g(y)$.
- **Cận tích phân:** Cận của tích phân là các giá trị trên trục Oy, tức là từ $y = a$ đến $y = b$.

Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp chia nhỏ vật thể thành các lát mỏng (đĩa tròn hoặc vành khăn) vuông góc với trục Oy và tính tổng thể tích của chúng bằng tích phân.

II. Các trường hợp cụ thể

1. Trường hợp 1: Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục Oy ($x=0$), và hai đường thẳng $y = a$, $y = b$ ($a < b$)

Đây là trường hợp cơ bản nhất, còn được gọi là **Phương pháp đĩa (Disk Method)**.

Công thức

Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Oy, ta được một khối tròn xoay có thể tích V được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$$

Giải thích

- Ta xét một lát cắt mỏng của khối tròn xoay tại một giá trị y bất kỳ, lát cắt này vuông góc với trục Oy và có bề dày là dy .
- Lát cắt này có dạng một hình đĩa tròn với bán kính là $R = |g(y)|$. Do ta thường xét $g(y) \geq 0$ trong miền tính toán, nên $R = g(y)$.
- Diện tích của đĩa tròn này là $S(y) = \pi R^2 = \pi[g(y)]^2$.
- Thể tích của lát cắt (hình trụ mỏng) là $dV = S(y)dy = \pi[g(y)]^2 dy$.
- Lấy tích phân từ $y = a$ đến $y = b$, ta được tổng thể tích của toàn bộ khối tròn xoay.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = \sqrt{y}$, trục Oy, và hai đường thẳng $y = 1$, $y = 4$ quanh trục Oy.

Phân tích:

- Hàm số đã ở dạng $x = g(y) = \sqrt{y}$.
- Cận tích phân là $y = 1$ và $y = 4$.
- Áp dụng trực tiếp công thức.

Bài giải:

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_1^4 y dy$$

$$V = \pi [y^2/2] \Big|_1^4 = \pi (4^2/2 - 1^2/2) = \pi (16/2 - 1/2) = \pi (15/2) = 7.5\pi \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Oy và đường thẳng $y = 8$. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay (H) quanh trục Oy.

Phân tích:

- Hàm số đang ở dạng $y = f(x) = x^3$. Ta cần chuyển về dạng $x = g(y)$. Từ $y = x^3$, suy ra $x = \sqrt[3]{y}$.
- Cận dưới là giao điểm của đồ thị với trục Oy, tức là $y = 0$. Cận trên là $y = 8$.
- Áp dụng công thức.

Bài giải:

Ta có: $y = x^3 \Leftrightarrow x = y^{1/3}$. Vậy $g(y) = y^{1/3}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_0^8 (y^{1/3})^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy$$

$$V = \pi [y^{(2/3 + 1)} / (2/3 + 1)] \Big|_0^8 = \pi [y^{5/3} / (5/3)] \Big|_0^8 = \pi [3/5 * y^{5/3}] \Big|_0^8$$

$$V = (3\pi/5) * (8^{5/3} - 0^{5/3}) = (3\pi/5) * ((2^3)^{5/3}) = (3\pi/5) * (2^5) = (3\pi/5) * 32 = 96\pi/5 \text{ (đvtt)}.$$

2. Trường hợp 2: Hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị $x = g_1(y)$ và $x = g_2(y)$, và hai đường thẳng $y = a, y = b$ ($a < b$)

Trường hợp này sử dụng **Phương pháp vành khăn (Washer Method)**. Giả sử trong đoạn $[a, b]$, ta có $0 \leq g_1(y) \leq g_2(y)$.

Công thức

Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Oy, ta được một khối tròn xoay có thể tích V được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b ([g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2) dy$$

Giải thích

- Khi quay quanh trục Oy, đường cong "xa trục Oy hơn" là $x = g_2(y)$ sẽ tạo ra một khối tròn xoay có thể tích lớn hơn (V_2). Đường cong "gần trục Oy hơn" là $x = g_1(y)$ sẽ tạo ra một khối tròn xoay có thể tích nhỏ hơn (V_1).
- Thể tích của khối tròn xoay cần tìm chính là hiệu $V = V_2 - V_1$.
- $V_2 = \pi \int_a^b [g_2(y)]^2 dy$
- $V_1 = \pi \int_a^b [g_1(y)]^2 dy$
- Suy ra $V = V_2 - V_1 = \pi \int_a^b ([g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2) dy$.
- Về mặt hình học, mỗi lát cắt mỏng vuông góc với trục Oy có dạng một hình vành khăn, với bán kính lớn $R = g_2(y)$ và bán kính nhỏ $r = g_1(y)$. Diện tích vành khăn là $S(y) = \pi(R^2 - r^2) = \pi([g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2)$.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $x = y^2$ và $x = 2y$ quanh trục Oy.

Phân tích:

- Tìm cận tích phân bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm (theo biến y): $y^2 = 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y-2) = 0$. Vậy $y = 0$ hoặc $y = 2$. Cận là $[0, 2]$.
- Xét trong khoảng $(0, 2)$, chọn $y = 1$. Ta có: $x = 1^2 = 1$ và $x = 2 \cdot 1 = 2$. Vậy $2y > y^2$ trong khoảng này.
- Do đó, $g_2(y) = 2y$ (đường ngoài) và $g_1(y) = y^2$ (đường trong).

Bài giải:

Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_0^2 [(2y)^2 - (y^2)^2] dy = \pi \int_0^2 (4y^2 - y^4) dy$$

$$V = \pi [4y^3/3 - y^5/5] \Big|_0^2 = \pi [(4 \cdot 2^3/3 - 2^5/5) - (0)]$$

$$V = \pi (32/3 - 32/5) = \pi (160/15 - 96/15) = 64\pi/15 \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ quanh trục Oy.

Phân tích:

- Đây là một cách diễn đạt khác của Trường hợp 1. Hình phẳng được giới hạn bởi $x = \sqrt{y}$ (do $x \geq 0$), $x = 0$ (trục Oy), $y = 0$ (giao điểm) và $y = 4$.

- Ta có thể xem đây là trường hợp 2 với $g_2(y) = \sqrt{y}$ và $g_1(y) = 0$.

Bài giải:

Chuyển hàm số về dạng x theo y : $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ (vì $x \geq 0$).

Áp dụng công thức trường hợp 1:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^4 y dy$$

$$V = \pi [y^2/2] \big|_0^4 = \pi (4^2/2 - 0^2/2) = 8\pi \text{ (đvtt)}.$$

III. Bảng so sánh phương pháp tính thể tích quay quanh Ox và Oy

Tiêu chí	Quay quanh trục Ox	Quay quanh trục Oy
Biến và Hàm số	Tích phân theo biến x . Hàm số có dạng y = f(x) .	Tích phân theo biến y . Hàm số có dạng x = g(y) .
Cận tích phân	Là các giá trị trên trục Ox, từ x = a đến x = b .	Là các giá trị trên trục Oy, từ y = a đến y = b .
Phương pháp đĩa (Giới hạn bởi 1 đường cong và trục quay)	$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$	$V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$
Phương pháp vành khăn (Giới hạn bởi 2 đường cong)	$V = \pi \int_a^b ([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2) dx$ ($f_2(x)$ là đường ngoài)	$V = \pi \int_a^b ([g_2(y)]^2 - [g_1(y)]^2) dy$ ($g_2(y)$ là đường ngoài)

IV. Các bước giải bài toán tổng quát

- Xác định trục quay:** Đọc kỹ đề bài để xác định trục quay là Oy.
- Vẽ hình (nếu cần):** Phác thảo hình phẳng để xác định đường nào nằm ngoài, đường nào nằm trong và xác định cận tích phân.

3. **Biểu diễn hàm số theo biến y :** Đưa tất cả các phương trình đường cong về dạng $x = g(y)$.
4. **Xác định cận tích phân:** Tìm các giá trị $y = a$, $y = b$ bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm (theo biến y) hoặc từ giả thiết đề bài.
5. **Lựa chọn và áp dụng công thức:**
- Nếu hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục Oy , dùng công thức phương pháp đĩa.
 - Nếu hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong, dùng công thức phương pháp vành khăn.
6. **Tính tích phân và kết luận:** Thực hiện phép tính tích phân để tìm ra kết quả cuối cùng.