

Tổng hợp kiến thức về Đường Elip

Elip là một trong ba đường conic (cùng với Parabol và Hyperbol), có nhiều ứng dụng quan trọng trong khoa học, kỹ thuật và thiên văn học. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức cơ bản về Elip trong chương trình Toán lớp 10.

1. Định nghĩa đường Elip (E)

Trong mặt phẳng, cho hai điểm cố định F_1 và F_2 . Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai điểm F_1 và F_2 là một hằng số không đổi và lớn hơn khoảng cách F_1F_2 .

- **Công thức định nghĩa:** $MF_1 + MF_2 = 2a$
- **Các yếu tố trong định nghĩa:**
 - F_1, F_2 : được gọi là các **tiêu điểm** của Elip.
 - Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$: được gọi là **tiêu cự**.
 - $2a$: là hằng số, với điều kiện $a > c > 0$.

Ví dụ: Cho hai điểm $F_1(-3, 0)$ và $F_2(3, 0)$. Tập hợp các điểm $M(x, y)$ sao cho $MF_1 + MF_2 = 10$ là một đường Elip. Ở đây, ta có $2c = F_1F_2 = 6 \Rightarrow c = 3$, và $2a = 10 \Rightarrow a = 5$. Điều kiện $a > c$ ($5 > 3$) được thỏa mãn.

2. Phương trình chính tắc của Elip

Để xây dựng phương trình của Elip, ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc O là trung điểm của F_1F_2 , và hai tiêu điểm F_1, F_2 nằm trên trục Ox. Khi đó, tọa độ các tiêu điểm là $F_1(-c, 0)$ và $F_2(c, 0)$.

a. Phương trình chính tắc

Với các điều kiện trên, phương trình chính tắc của Elip có dạng:

(E): $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

- Trong đó: $a > b > 0$.
- Mối quan hệ giữa a, b, c : $a^2 = b^2 + c^2$ (hay $b^2 = a^2 - c^2$).

b. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Viết phương trình chính tắc của Elip (E) biết nó có trục lớn bằng 10 và trục nhỏ bằng 8.

Giải:

- Độ dài trục lớn là $2a = 10 \Rightarrow a = 5$.
- Độ dài trục nhỏ là $2b = 8 \Rightarrow b = 4$.
- Kiểm tra điều kiện $a > b > 0$ ($5 > 4 > 0$) thỏa mãn.
- Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $x^2/5^2 + y^2/4^2 = 1$ hay $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

Ví dụ 2: Cho Elip (E) có phương trình: $x^2/169 + y^2/144 = 1$. Xác định a, b, c .

Giải:

- Từ phương trình, ta có $a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$.
- $b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$.
- Áp dụng công thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta có: $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow c = 5$.

3. Các yếu tố hình học và tính chất của Elip

Từ phương trình chính tắc (E): $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, ta có thể suy ra các yếu tố hình học và tính chất sau:

a. Tiêu điểm và Tiêu cự

- **Tọa độ tiêu điểm:** $F_1(-c, 0)$ và $F_2(c, 0)$.
- **Tiêu cự:** $F_1F_2 = 2c$, với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Ví dụ: Với Elip (E): $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Ta có $a^2 = 25$, $b^2 = 9$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$. Vậy hai tiêu điểm là $F_1(-4, 0)$ và $F_2(4, 0)$.

b. Các đỉnh và Trục

- **Đỉnh trên trục lớn (trục Ox):** $A_1(-a, 0)$ và $A_2(a, 0)$.
- **Đỉnh trên trục nhỏ (trục Oy):** $B_1(0, -b)$ và $B_2(0, b)$.
- **Độ dài trục lớn:** $A_1A_2 = 2a$.
- **Độ dài trục nhỏ:** $B_1B_2 = 2b$.

Ví dụ: Với Elip (E): $x^2/100 + y^2/36 = 1$. Ta có $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ và $b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$. Các đỉnh của Elip là $A_1(-10, 0)$, $A_2(10, 0)$, $B_1(0, -6)$, $B_2(0, 6)$. Độ dài trục lớn là 20, độ dài trục nhỏ là 12.

c. Tâm sai của Elip

Tâm sai của Elip, ký hiệu là e , là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn. Nó thể hiện độ "dẹt" của Elip.

- **Công thức:** $e = c/a$
- **Tính chất:** $0 \leq e < 1$.
- Nếu e càng gần 0, Elip càng "tròn" (gần với đường tròn).
- Nếu e càng gần 1, Elip càng "dẹt".

Ví dụ: Tìm tâm sai của Elip (E): $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

Giải: Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. Ta có $b^2 = 16$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$. Vậy tâm sai là $e = c/a = 3/5$.

d. Hình chữ nhật cơ sở

Là hình chữ nhật được tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$ và $y = \pm b$. Hình chữ nhật này ngoại tiếp Elip.

- **Tọa độ các đỉnh:** $(a, b), (a, -b), (-a, -b), (-a, b)$.
- **Diện tích:** $S = (2a)(2b) = 4ab$.

e. Bán kính qua tiêu của một điểm

Cho điểm $M(x_0, y_0)$ thuộc Elip (E). Khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm được gọi là bán kính qua tiêu.

- **Công thức:**
 - $MF_1 = a + ex_0 = a + (c/a)x_0$

○ $MF_2 = a - ex_0 = a - (c/a)x_0$

Ví dụ: Cho Elip (E): $x^2/100 + y^2/36 = 1$ và điểm $M(8, 18/5)$ thuộc (E). Tính MF_1 và MF_2 .

Giải: Ta có $a=10$, $b=6$, $c=\sqrt{(100-36)}=8$. Tâm sai $e = c/a = 8/10 = 4/5$. Tọa độ $x_0 = 8$.

- $MF_1 = a + ex_0 = 10 + (4/5)*8 = 10 + 32/5 = 82/5$.
- $MF_2 = a - ex_0 = 10 - (4/5)*8 = 10 - 32/5 = 18/5$.
- Kiểm tra: $MF_1 + MF_2 = 82/5 + 18/5 = 100/5 = 20 = 2a$ (đúng).

4. Bảng tổng hợp các yếu tố của Elip (E)

Yếu tố	Công thức / Tọa độ	Ghi chú
Phương trình chính tắc	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	$a > b > 0$
Quan hệ a, b, c	$a^2 = b^2 + c^2$	c là nửa tiêu cự
Tâm đối xứng	Gốc tọa độ O(0, 0)	
Trục đối xứng	Ox, Oy	
Tiêu điểm	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	Nằm trên trục lớn Ox
Tiêu cự	$F_1F_2 = 2c$	
Đỉnh	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$	4 đỉnh
Độ dài trục lớn	$A_1A_2 = 2a$	
Độ dài trục nhỏ	$B_1B_2 = 2b$	
Tâm sai	$e = c/a$	$0 < e < 1$

5. Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Xác định các yếu tố của Elip khi biết phương trình

Bài toán: Cho Elip (E): $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Tìm tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của Elip.

Giải:

1. Từ phương trình, ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$.
2. Tính c: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$.
3. **Tọa độ các đỉnh:** $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$.
4. **Tọa độ các tiêu điểm:** $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.
5. **Tiêu cự:** $2c = 2 \cdot 4 = 8$.
6. **Tâm sai:** $e = c/a = 4/5$.

Dạng 2: Viết phương trình chính tắc của Elip khi biết các yếu tố

Bài toán: Lập phương trình chính tắc của Elip (E), biết (E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$ và đi qua điểm $M(1, \sqrt{3}/2)$.

Giải:

1. Phương trình chính tắc của Elip có dạng: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (với $a > b > 0$).
2. Từ tọa độ tiêu điểm, ta có $c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$.
3. Ta có mối liên hệ: $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3$. (1)
4. Vì Elip đi qua điểm $M(1, \sqrt{3}/2)$ nên tọa độ của M thỏa mãn phương trình Elip:
$$1^2/a^2 + (\sqrt{3}/2)^2/b^2 = 1 \Leftrightarrow 1/a^2 + (3/4)/b^2 = 1 \Leftrightarrow 1/a^2 + 3/(4b^2) = 1. \quad (2)$$

5. Thế (1) vào (2), ta được: $1/(b^2 + 3) + 3/(4b^2) = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3(b^2 + 3) = 4b^2(b^2 + 3) \Leftrightarrow 4b^2 + 3b^2 + 9 = 4b^4 + 12b^2 \Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0$.

6. Đặt $t = b^2$ ($t > 0$). Phương trình trở thành: $4t^2 + 5t - 9 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm $t = 1$ (nhận) và $t = -9/4$ (loại).

7. Với $t = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$.

8. Suy ra $a^2 = b^2 + 3 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow a = 2$.

9. Kiểm tra điều kiện $a > b > 0$ ($2 > 1 > 0$) thỏa mãn.

10. Vậy phương trình chính tắc của Elip là: **$x^2/4 + y^2/1 = 1$** .