

Tổng hợp phương pháp tính diện tích hình phẳng

Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng là một trong những nội dung quan trọng nhất của chương trình Giải tích lớp 12. Bài viết này sẽ tổng hợp đầy đủ các dạng toán, công thức và phương pháp giải chi tiết.

I. Kiến thức nền tảng: Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a, b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành ($y = 0$), và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bằng công thức:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Đây là cơ sở để xây dựng các công thức tính diện tích hình phẳng trong các trường hợp phức tạp hơn.

II. Trường hợp 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$

1. Công thức tổng quát

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox ($y = 0$), và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

2. Giải thích

Vì diện tích là một giá trị không âm, ta phải lấy giá trị tuyệt đối của $f(x)$. Tích phân của $|f(x)|$ đảm bảo rằng phần diện tích nằm dưới trục Ox (nơi $f(x) < 0$) vẫn được cộng vào tổng diện tích thay vì bị trừ đi.

3. Các bước giải chi tiết

- Bước 1:** Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ trên khoảng (a, b) , tìm các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- Bước 2:** Chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ bởi các nghiệm vừa tìm được. Ví dụ: $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$.
- Bước 3:** Xét dấu của $f(x)$ trên từng đoạn con. Trên mỗi đoạn, $f(x)$ sẽ mang một dấu nhất định (dương hoặc âm).
- Bước 4:** Áp dụng công thức tích phân bằng cách phá dấu giá trị tuyệt đối:
$$S = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[c, d]$ thì $\int_c^d |f(x)| dx = \int_c^d f(x) dx$.
Nếu $f(x) < 0$ trên $[c, d]$ thì $\int_c^d |f(x)| dx = -\int_c^d f(x) dx$.

4. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$, trục Ox, và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

- Phân tích:** Ta thấy $f(x) = x^2 + 1 > 0$ với mọi x . Do đó, $|f(x)| = f(x)$.
- Giải:**

Diện tích cần tính là:

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = (x^3/3 + x) \Big|_0^2 = (2^3/3 + 2) - (0^3/3 + 0) = 8/3 + 2 = 14/3 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4$, trục Ox, và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

- **Phân tích:** Cần xét dấu của $f(x) = x^2 - 4$.

- **Giải:**

Bước 1: Giải phương trình $x^2 - 4 = 0$? $x = 2$ hoặc $x = -2$. Chỉ có nghiệm $x = 2$ thuộc khoảng $(0, 3)$.

Bước 2: Chia đoạn $[0, 3]$ thành $[0, 2]$ và $[2, 3]$.

Bước 3: Xét dấu:

- Trên $[0, 2]$, chọn $x = 1$, ta có $1^2 - 4 = -3 < 0$. Vậy $f(x) < 0$ trên $[0, 2]$.
- Trên $[2, 3]$, chọn $x = 2.5$, ta có $2.5^2 - 4 = 2.25 > 0$. Vậy $f(x) > 0$ trên $[2, 3]$.

Bước 4: Tính tích phân:

$$S = \int_0^3 |x^2 - 4| dx = \int_0^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^3 |x^2 - 4| dx$$

$$S = \int_0^2 -(x^2 - 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx$$

$$S = (4x - x^3/3) \Big|_0^2 + (x^3/3 - 4x) \Big|_2^3$$

$$S = [(8 - 8/3) - 0] + [(9 - 12) - (8/3 - 8)] = 16/3 + [-3 - (-16/3)] = 16/3 + 7/3 = 23/3 \text{ (đvdt)}.$$

III. Trường hợp 2: Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $x = a$, $x = b$

1. Công thức tổng quát

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

2. Giải thích

Công thức này tính diện tích bằng cách lấy tích phân của "khoảng cách" thẳng đứng giữa hai đồ thị, $|f(x) - g(x)|$, dọc theo trục Ox từ a đến b .

3. Các bước giải chi tiết

- Bước 1:** Lập phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ hay $f(x) - g(x) = 0$. Giải phương trình để tìm các nghiệm x_i .
- Bước 2 (Nếu chưa có cận a , b):** Nếu bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị (không cho $x=a$, $x=b$), thì a và b chính là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.
- Bước 3:** Tương tự trường hợp 1, xét dấu của hiệu $h(x) = f(x) - g(x)$ trên các khoảng con xác định bởi các nghiệm và cận a , b .
- Bước 4:** Phá dấu giá trị tuyệt đối và tính tích phân trên từng khoảng.

4. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + 4$.

- **Phân tích:** Đây là dạng hình phẳng khép kín, cận tích phân là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm.

- **Giải:**

Bước 1: Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x = -x^2 + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ Phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

Bước 2: Cận tích phân là $a = -1$ và $b = 2$.

Bước 3: Diện tích cần tính: $S = \int_{-1}^2 |(x^2 - 2x) - (-x^2 + 4)| dx = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx$

Xét dấu $h(x) = 2x^2 - 2x - 4$ trên $[-1, 2]$. Vì đây là tam thức bậc hai có hai nghiệm -1 và 2 , và hệ số $a=2>0$, nên $h(x) \leq 0$ trên đoạn $[-1, 2]$.

Bước 4: Tính tích phân: $S = \int_{-1}^2 -(2x^2 - 2x - 4) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$
 $S = (-2x^3/3 + x^2 + 4x) \Big|_{-1}^2 = [(-16/3 + 4 + 8)] - [(2/3 + 1 - 4)] = (20/3) - (-5/3) = 25/3$ (đvdt).

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3$, $y = x$, $x = -2$, $x = 1$.

- **Giải:**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

. Nghiệm là $x = 0, x = 1, x = -1$.

Các cận và nghiệm chia đoạn $[-2, 1]$ thành các đoạn: $[-2, -1], [-1, 0], [0, 1]$.

Diện tích $S = \int_{-2}^1 |x^3 - x| dx = \int_{-2}^{-1} |x^3 - x| dx + \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx$

◦ Trên $[-2, -1]$, $x^3 - x \geq 0$.

◦ Trên $[-1, 0]$, $x^3 - x \geq 0$.

◦ Trên $[0, 1]$, $x^3 - x \leq 0$.

$$S = \int_{-2}^{-1} (x^3 - x) dx + \int_{-1}^0 -(x^3 - x) dx + \int_0^1 -(x^3 - x) dx$$

$$S = (x^4/4 - x^2/2) \Big|_{-2}^{-1} - (x^4/4 - x^2/2) \Big|_{-1}^0 - (x^4/4 - x^2/2) \Big|_0^1$$

$$S = [(1/4 - 1/2) - (4 - 2)] - [0 - (1/4 - 1/2)] - [(1/4 - 1/2) - 0]$$

$S = (-1/4 - 2) - (-1/4) - (-1/4) = -9/4 + 1/4 + 1/4 = -7/4$. Lỗi tính toán, diện tích phải dương. Ta xem lại dấu

◦ Trên $[-2, -1]$, ví dụ $x = -1.5, (-1.5)^3 - (-1.5) = -3.375 + 1.5 < 0$.

◦ Trên $[-1, 0]$, ví dụ $x = -0.5, (-0.5)^3 - (-0.5) = -0.125 + 0.5 > 0$.

◦ Trên $[0, 1]$, ví dụ $x = 0.5, (0.5)^3 - (0.5) = 0.125 - 0.5 < 0$.

$$\text{Vậy } S = \int_{-2}^{-1} -(x^3 - x) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 -(x^3 - x) dx$$

$$S = -(x^4/4 - x^2/2) \Big|_{-2}^{-1} + (x^4/4 - x^2/2) \Big|_{-1}^0 - (x^4/4 - x^2/2) \Big|_0^1$$

$$S = -(-9/4) + (1/4) - (-1/4) = 9/4 + 1/4 + 1/4 = 11/4 \text{ (đvdt)}.$$

IV. Bảng tổng kết và lưu ý quan trọng

1. Bảng tóm tắt công thức

Trường hợp	Giới hạn bởi các đường	Công thức tính diện tích
1	$y = f(x)$, trục Ox ($y=0$) , $x = a$, $x = b$	$S = \int_a^b f(x) \, dx$
2	$y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$	$S = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx$
3 (Theo biến y)	$x = g(y)$, $x = h(y)$, $y = c$, $y = d$	$S = \int_c^d g(y) - h(y) \, dy$

2. Những lưu ý quan trọng

- **Phác thảo đồ thị:** Nếu có thể, hãy luôn phác thảo đồ thị của các hàm số. Việc này giúp hình dung rõ ràng hình phẳng cần tính, xác định được hàm nào nằm trên, hàm nào nằm dưới, và các cận tích phân một cách trực quan.
- **Tìm đủ giao điểm:** Bước giải phương trình hoành độ giao điểm là cực kỳ quan trọng. Sai hoặc thiếu nghiệm sẽ dẫn đến việc xác định sai cận và tính sai diện tích.
- **Không bỏ qua giá trị tuyệt đối:** Luôn viết công thức tổng quát có dấu giá trị tuyệt đối. Sau đó, dùng phương pháp xét dấu (hoặc dựa vào đồ thị) để phá dấu giá trị tuyệt đối một cách chính xác.

- **Sử dụng máy tính cầm tay:** Máy tính cầm tay (Casio, Vinacal) có chức năng tính tích phân xác định rất mạnh. Sau khi đã thiết lập được công thức tích phân cuối cùng (đã phá dấu giá trị tuyệt đối), bạn có thể dùng máy tính để kiểm tra hoặc tính nhanh kết quả, tránh sai sót trong tính toán nguyên hàm.
- **Chú ý đến cận tích phân:** Khi thiết lập tích phân, luôn đảm bảo cận dưới nhỏ hơn cận trên.