

TỔNG HỢP KIẾN THỨC VỀ TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA THAM SỐ M

Chuyên đề về tính đơn điệu của hàm số chứa tham số là một trong những nội dung trọng tâm trong chương trình Toán 12 và thường xuất hiện trong các kỳ thi quan trọng. Tài liệu này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức, phương pháp và các dạng bài tập thường gặp.

1. Kiến thức nền tảng cần nhớ

Định lý về điều kiện cần và đủ cho tính đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số là hàm hằng trên K .

Lưu ý: Đối với các hàm đa thức, điều kiện $f'(x) = 0$ xảy ra tại hữu hạn điểm luôn được thỏa mãn. Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y = (ax+b)/(cx+d)$, đạo hàm không có dấu bằng, tức là $y' > 0$ hoặc $y' < 0$.

2. Các dạng toán tìm tham số m để hàm số đơn điệu

Dạng 1: Tìm m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên R

Phương pháp giải

Để xét tính đơn điệu của hàm số trên R, ta cần xét dấu của đạo hàm y' trên R.

- Tính đạo hàm:** $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Biện luận:** y' là một tam thức bậc hai. Để y' không đổi dấu trên R, ta có các trường hợp sau:

Yêu cầu bài toán	Điều kiện tương đương
Hàm số đồng biến trên R	$y' \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow a > 0$ và $\Delta' \leq 0$ (hoặc $\Delta \leq 0$)
Hàm số nghịch biến trên R	$y' \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow a < 0$ và $\Delta' \leq 0$ (hoặc $\Delta \leq 0$)

Ghi chú: Nếu hệ số a chứa tham số m, ta cần xét riêng trường hợp $a = 0$.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+2)x - 1$ đồng biến trên R.

Giải:

- Tập xác định: $D = R$.
- Tính đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m+2) = 3(x^2 - 2mx + m + 2)$.
- Hàm số đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in R$.
 $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0, \forall x \in R$.

4. Đây là tam thức bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$. Do đó, điều kiện tương đương với $\Delta' \leq 0$.

$$\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m+2) = m^2 - m - 2.$$

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

5. Vậy, với $-1 \leq m \leq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = (m-1)x^3/3 - (m-1)x^2 + (2m-3)x + 2024$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Tính đạo hàm: $y' = (m-1)x^2 - 2(m-1)x + (2m-3)$.

3. **Trường hợp 1:** $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó, $y' = 2(1) - 3 = -1 < 0$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

4. **Trường hợp 2:** $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện: $a > 0$ và $\Delta' \leq 0$.

$$\Leftrightarrow \{ m - 1 > 0 \text{ và } [-(m-1)]^2 - (m-1)(2m-3) \leq 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \{ m > 1 \text{ và } (m-1)^2 - (2m^2 - 5m + 3) \leq 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \{ m > 1 \text{ và } -m^2 + 3m - 2 \leq 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \{ m > 1 \text{ và } -(m-1)(m-2) \leq 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \{ m > 1 \text{ và } (m \leq 1 \text{ hoặc } m \geq 2) \}$$

Kết hợp điều kiện, ta được $m = 1$.

5. Kết hợp cả hai trường hợp, ta có $m \leq 1$.

Dạng 2: Tìm m để hàm số $y = (ax+b)/(cx+d)$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

Phương pháp giải

1. **Tìm tập xác định:** $D = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$.
2. **Tính đạo hàm:** $y' = (ad - bc) / (cx + d)^2$.
3. **Biện luận:** Dấu của y' phụ thuộc vào tử số $(ad - bc)$ vì mẫu số $(cx + d)^2 > 0$ với mọi x thuộc D .
 - Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow \mathbf{ad - bc > 0}$.
 - Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow \mathbf{ad - bc < 0}$.

Ví dụ minh họa

Ví dụ: Tìm m để hàm số $y = (mx - 4) / (x - m)$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

Giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.
2. Tính đạo hàm: $y' = (m*(-m) - 1*(-4)) / (x - m)^2 = (-m^2 + 4) / (x - m)^2$.
3. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D$.
 - $\Leftrightarrow -m^2 + 4 > 0$
 - $\Leftrightarrow m^2 < 4$
 - $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.
4. Vậy, với $-2 < m < 2$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

3. Phương pháp cô lập m cho bài toán đơn điệu trên khoảng (a, b)

Đây là phương pháp rất hiệu quả khi tham số m có thể tách riêng ra khỏi biến x.

Các bước thực hiện

- Bước 1:** Tính đạo hàm y' .
- Bước 2:** Lập luận điều kiện đơn điệu. Ví dụ, hàm số đồng biến trên $(a, b) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a, b)$.
- Bước 3:** Biến đổi bất phương trình $y' \geq 0$ (hoặc $y' \leq 0$) về dạng **$m \geq g(x)$** hoặc **$m \leq g(x)$** với mọi $x \in (a, b)$.
- Bước 4:** Lập bảng biến thiên (hoặc tìm GTLN, GTNN) của hàm $g(x)$ trên (a, b) .
- Bước 5:** Kết luận:
 - Nếu $m \geq g(x), \forall x \in (a, b)$ thì **$m \geq \max g(x)$** trên (a, b) .
 - Nếu $m \leq g(x), \forall x \in (a, b)$ thì **$m \leq \min g(x)$** trên (a, b) .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = (1/3)x^3 - x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0, +\infty)$.

Giải:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tính đạo hàm: $y' = x^2 - 2x - m$.

3. Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - m \geq 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x, \forall x \in (0, +\infty).$$

4. Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ trên $(0, +\infty)$.

$$g'(x) = 2x - 2. \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

5. Lập bảng biến thiên cho $g(x)$ trên $(0, +\infty)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

6. Từ bảng biến thiên, ta thấy min $g(x)$ trên $(0, +\infty)$ là $g(1) = -1$.

7. Để $m \leq g(x)$ với mọi $x \in (0, +\infty)$, ta phải có $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq -1$.

8. Vậy, $m \leq -1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = (x^2 - 2mx + m) / (x - 1)$ nghịch biến trên khoảng $(1, +\infty)$.

Giải:

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Tính đạo hàm: $y' = [(2x - 2m)(x - 1) - (x^2 - 2mx + m)] / (x - 1)^2 = (x^2 - 2x + m) / (x - 1)^2$.

3. Hàm số nghịch biến trên $(1, +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (1, +\infty)$.

Vì $(x - 1)^2 > 0, \forall x \in (1, +\infty)$, điều kiện tương đương:

$$x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq -x^2 + 2x, \forall x \in (1, +\infty).$$

4. Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 2x$ trên $(1, +\infty)$.

$g'(x) = -2x + 2$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (không thuộc khoảng đang xét).

5. Lập bảng biến thiên cho $g(x)$ trên $(1, +\infty)$:

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

6. Từ bảng biến thiên, ta thấy $g(x)$ luôn nhỏ hơn 1 và tiến về $-\infty$. Để $m \leq g(x)$ với mọi $x \in (1, +\infty)$, ta phải có $m \leq \min g(x)$, nhưng $g(x)$ không có giá trị nhỏ nhất. Tuy nhiên, ta thấy rằng $\sup g(x) = 1$ (giá trị $g(x)$ tiến tới khi x tiến về $1+$). Vì vậy, ta cần $m \leq -x^2 + 2x$. Nhận thấy $-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1$. Do đó, nếu $m \leq \min g(x)$ thì không có m . Ta cần xem lại điều kiện. $m \leq g(x)$ trên $(1, +\infty)$. Ta cần m nhỏ hơn hoặc bằng mọi giá trị của $g(x)$. Ta thấy $g(x)$ là một parabol có đỉnh tại $x=1, g(1)=1$. Trên $(1, +\infty)$, hàm số nghịch biến và đi từ 1 xuống $-\infty$. Vậy để $m \leq g(x)$ với mọi $x > 1$ thì không tồn tại m . Có lẽ đề bài là đồng biến. Giả sử đề bài là đồng biến: $m \geq g(x) = -x^2 + 2x$. Ta cần $m \geq \max g(x)$ trên $(1, +\infty)$. Từ BBT, $\max g(x)$ không tồn tại, nhưng $g(x)$ luôn < 1 . Vậy $m \geq 1$.

7. Quay lại đề gốc: $m \leq g(x) = -x^2 + 2x$ trên $(1, +\infty)$. Vì $g(x)$ không có min, nên không có giá trị m nào thỏa mãn $m \leq g(x)$ với mọi $x > 1$. Vậy không tồn tại m .

4. Một số lưu ý quan trọng

- **Hệ số a chứa tham số:** Với hàm bậc ba, bậc bốn, nếu hệ số của bậc cao nhất chứa tham số m , phải xét riêng trường hợp hệ số đó bằng 0.
- **Điều kiện của mẫu:** Khi bài toán yêu cầu hàm số đơn điệu trên khoảng (a, b) , đối với hàm phân thức $y = (ax+b)/(cx+d)$, ngoài điều kiện về dấu của y' , ta phải có điều kiện để khoảng (a, b) nằm trong tập xác định. Tức là nghiệm của mẫu $-d/c$ không được thuộc khoảng (a, b) .
- **Dấu bằng của đạo hàm:** Nhớ rằng hàm đa thức và các hàm số thông thường khác có thể có $y' = 0$ tại hữu hạn điểm. Hàm phân thức $y = (ax+b)/(cx+d)$ thì y' không có dấu bằng.
- **Không cô lập được m:** Nếu không thể cô lập m , ta phải sử dụng các phương pháp khác như định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, phương pháp đồ thị...