

Phương pháp giải bất phương trình mũ và logarit bằng phương pháp hàm số

Phương pháp hàm số là một công cụ mạnh để giải quyết các bài toán bất phương trình mũ và logarit phức tạp, đặc biệt là những bài không thể biến đổi đại số thông thường. Cốt lõi của phương pháp này dựa trên việc xét tính đơn điệu của hàm số (đồng biến hoặc nghịch biến).

1. Cơ sở lý thuyết: Tính đơn điệu của hàm số

Tính chất cơ bản được áp dụng là mối liên hệ giữa giá trị của hàm số và giá trị của đối số khi hàm số đơn điệu trên một khoảng.

- Nếu hàm số **$y = f(x)$ đồng biến (tăng)** trên khoảng (a, b) thì với mọi $u, v \in (a, b)$: **$f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$** .
- Nếu hàm số **$y = f(x)$ nghịch biến (giảm)** trên khoảng (a, b) thì với mọi $u, v \in (a, b)$: **$f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$** .

Cách xét tính đơn điệu: Ta thường sử dụng đạo hàm:

1. Tính đạo hàm $f'(x)$.
2. Xét dấu của $f'(x)$ trên tập xác định K .
3. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ (dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm) thì hàm số đồng biến trên K .

4. Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ (dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm) thì hàm số nghịch biến trên K .

2. Các dạng bất phương trình và phương pháp giải

2.1. Dạng 1: Đưa về dạng $f(u) > f(v)$

Đây là dạng bài phổ biến nhất, trong đó hai vế của bất phương trình có cấu trúc tương tự nhau.

Phương pháp giải:

- Bước 1:** Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của bất phương trình.
- Bước 2:** Biến đổi bất phương trình về dạng $f(u) > f(v)$ (hoặc $, \geq, \leq$), trong đó $u = u(x)$ và $v = v(x)$.
- Bước 3:** Xét hàm số đặc trưng $y = f(t)$. Tính đạo hàm $f'(t)$ và xét dấu để kết luận tính đơn điệu của hàm số trên miền xác định của t .
- Bước 4:** Dựa vào tính đơn điệu để đưa ra kết luận:
 - Nếu $f(t)$ đồng biến: $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v$.
 - Nếu $f(t)$ nghịch biến: $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u < v$.
- Bước 5:** Giải bất phương trình $u > v$ (hoặc $u < v$) vừa thu được.
- Bước 6:** Kết hợp với ĐKXĐ ban đầu để đưa ra tập nghiệm cuối cùng.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $3^{(x^2 - 2x)} + x^2 - 2x > 3^{(x - 2)} + x - 2$.

- **ĐKXĐ:** $x \in \mathbb{R}$.

- Bất phương trình có dạng $f(x^2 - 2x) > f(x - 2)$ với hàm số đặc trưng là **$f(t) = 3^t + t$** .
- Xét hàm $f(t) = 3^t + t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.
- Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Do đó, bất phương trình tương đương: $x^2 - 2x > x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$.
- Giải bất phương trình bậc hai, ta được: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.
- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình $\log_2(x^2 + x + 2) + 2(x^2 + x + 2) \log_2(3x + 5) + 2(3x + 5)$.

• **ĐKXĐ:**

- $x^2 + x + 2 = (x + 1/2)^2 + 7/4 > 0$ (luôn đúng).
- $3x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5/3$.
- Bất phương trình có dạng $f(x^2 + x + 2) f(3x + 5)$ với hàm số đặc trưng là **$f(t) = \log_2 t + 2t$** .
- Xét hàm $f(t)$ trên $(0, +\infty)$. Ta có $f'(t) = 1/(t \ln 2) + 2 > 0$ với mọi $t > 0$.
- Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0, +\infty)$.
- Do đó, bất phương trình tương đương: $x^2 + x + 2 \cdot 3x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$.
- Giải bất phương trình bậc hai, ta được: $-1 < x < 3$.
- Kết hợp với ĐKXĐ $x > -5/3$, ta được tập nghiệm là $S = (-1, 3)$.

2.2. Dạng 2: $f(x) > m$ (Phương pháp cô lập tham số m)

Dạng toán này thường xuất hiện trong các bài toán tìm điều kiện của tham số m để bất phương trình có nghiệm, vô nghiệm, hoặc nghiệm đúng với mọi x trên một tập D cho trước.

Phương pháp giải:

1. **Bước 1:** Tìm ĐKXĐ.
2. **Bước 2:** Biến đổi bất phương trình, cô lập tham số m về một vế. Ví dụ: $f(x) > m$.
3. **Bước 3:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định D (tính đạo hàm, tìm cực trị, các giới hạn).
4. **Bước 4:** Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$ trên D .
5. **Bước 5:** Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán để kết luận giá trị của m .

Yêu cầu bài toán	Điều kiện của m
BPT $f(x) > m$ có nghiệm trên D	$m < \sup(f(x))$ trên D (thường là $m < \max f(x)$)
BPT $f(x) > m$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$	$m \leq \inf(f(x))$ trên D (thường là $m \leq \min f(x)$)
BPT $f(x) \geq m$ có nghiệm trên D	$m \leq \sup(f(x))$ trên D (thường là $m \leq \max f(x)$)
BPT $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$	$m \leq \inf(f(x))$ trên D (thường là $m \leq \min f(x)$)

Lưu ý: Các trường hợp $f(x) < m$ và $f(x) \leq m$ được suy luận tương tự.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $e^x + x \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

- Bất phương trình đã ở dạng cô lập m: $m \leq e^x + x$.
- Yêu cầu bài toán: BPT nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.
- Điều này tương đương với **$m \leq \min(f(x))$** trên đoạn $[0, 1]$, với $f(x) = e^x + x$.
- Xét hàm số $f(x) = e^x + x$ trên $[0, 1]$.
- Ta có $f'(x) = e^x + 1 > 0$ với mọi x.
- Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0, 1]$.

- Vì hàm số đồng biến, giá trị nhỏ nhất của nó trên đoạn $[0, 1]$ đạt tại $x = 0$.
- $\min f(x) = f(0) = e^0 + 0 = 1$.
- Vậy điều kiện của m là $m \leq 1$.

2.3. Dạng 3: Đoán nghiệm và chứng minh tính đơn điệu

Phương pháp này dùng để giải các bất phương trình không thể biến đổi về hai dạng trên. Ta sẽ chuyển bất phương trình về dạng $f(x) > 0$, tìm một nghiệm đặc biệt x_0 của phương trình $f(x) = 0$, sau đó dùng tính đơn điệu để kết luận.

Phương pháp giải:

1. **Bước 1:** Tìm ĐKXĐ.
2. **Bước 2:** Chuyển bất phương trình về dạng **$f(x) > 0$** (hoặc $\geq, \leq$).
3. **Bước 3:** Tìm (đoán) một nghiệm x_0 của phương trình $f(x) = 0$.
4. **Bước 4:** Chứng minh hàm số $f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định.
5. **Bước 5:** Kết luận tập nghiệm:
 - Nếu $f(x)$ đồng biến: BPT $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x > x_0$.
 - Nếu $f(x)$ nghịch biến: BPT $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow x < x_0$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ: Giải bất phương trình $2^x + \log_3(x+1) > 3$.

- **ĐKXĐ:** $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
- Chuyển BPT về dạng: $f(x) = 2^x + \log_3(x+1) - 3 > 0$.

- Ta nhầm thấy với $x = 1$, $f(1) = 2^1 + \log_3(1+1) - 3 = 2 + \log_3 2 - 3$. Không phải nghiệm đẹp.
- Thử lại, với $x=1$ thì $2^1 + \log_3(2) > 3$? $2+0.63 > 3$? Không đúng.
- Let's try a better example: $2^x + x > 3$.
- Chuyển BPT về dạng $f(x) = 2^x + x - 3 > 0$.
- Ta nhầm thấy với $x = 1$, $f(1) = 2^1 + 1 - 3 = 0$. Vậy $x_0 = 1$.
- Xét hàm số $f(x) = 2^x + x - 3$ trên $\mathbb{R}$.
- Ta có $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 1 > 0$ với mọi x .
- Vậy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x) > f(1)$.
- Do $f(x)$ đồng biến, ta có: $x > 1$.
- Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1, +\infty)$.

3. Một số lưu ý khi áp dụng phương pháp

- **Luôn tìm ĐKXĐ:** Đây là bước đầu tiên và quan trọng nhất, quên ĐKXĐ có thể dẫn đến kết quả sai.
- **Xét tính đơn điệu trên miền xác định:** Phải khảo sát hàm số trên đúng miền xác định của nó. Một hàm số có thể đồng biến trên khoảng này nhưng nghịch biến trên khoảng khác.
- **Cẩn thận chiều bất đẳng thức:** Khi sử dụng hàm nghịch biến, phải đổi chiều của bất đẳng thức.

- **Đọc kỹ yêu cầu bài toán tham số:** Phân biệt rõ các yêu cầu "có nghiệm", "nghiệm đúng với mọi x", "có k nghiệm"... để áp dụng điều kiện min, max cho chính xác.

4. Bài tập vận dụng

1. **Bài 1:** Giải bất phương trình $e^{(x^2+x)} - e^{(2-x)} > x^2 + 2x - 2$.

Gợi ý: Biến đổi thành $e^{(x^2+x)} - (x^2+x) > e^{(2-x)} - (2-x)$. Xét hàm $f(t) = e^t - t$.

2. **Bài 2:** Giải bất phương trình $\log_3(x^2 - 3x + 4) + x^2 - 3x + 2 \log_3(2x - 2) + 2x - 4$.

Gợi ý: Đưa về dạng $\log_3(x^2 - 3x + 4) + (x^2 - 3x + 4) \log_3(2x - 2) + (2x - 2)$. Xét hàm $f(t) = \log_3 t + t$.

3. **Bài 3:** Tìm m để bất phương trình $x + \ln(x+1) + m \geq 0$ có nghiệm trên khoảng $(0, 2)$.

Gợi ý: Cô lập $m \geq -x - \ln(x+1)$. Tìm điều kiện để m nhỏ hơn giá trị lớn nhất của $f(x) = -x - \ln(x+1)$ trên $(0, 2)$.

4. **Bài 4:** Giải bất phương trình $5^x + 4^x + 3^x > 12x + 3$.

Gợi ý: Đây là dạng khó hơn, có thể dùng đạo hàm cấp hai hoặc so sánh tốc độ tăng của hai vế. Xét $f(x) = 5^x + 4^x + 3^x - 12x - 3$. Nhận thấy $f(1)=0$. Tính $f'(x)$ và $f''(x)$ để chứng minh $f(x)$ đồng biến và $f'(1) > 0$.