

Tổng hợp kiến thức: Giá trị trung bình của hàm số và ứng dụng Tích phân

Trong chương trình Toán lớp 12, ứng dụng của tích phân không chỉ dừng lại ở việc tính diện tích hình phẳng hay thể tích khối tròn xoay mà còn được sử dụng để giải quyết các bài toán thực tế, trong đó có bài toán tìm giá trị trung bình của một đại lượng biến thiên liên tục. Bài viết này sẽ hệ thống hóa toàn bộ kiến thức liên quan đến chủ đề này.

1. Định nghĩa và Công thức tính Giá trị trung bình của hàm số

a. Khái niệm

Chúng ta đã quen thuộc với khái niệm trung bình cộng của một tập hợp các số rời rạc (ví dụ: điểm trung bình của các môn học). Tuy nhiên, làm thế nào để tính giá trị trung bình của một đại lượng biến đổi liên tục theo thời gian, chẳng hạn như nhiệt độ trong một ngày hay vận tốc của một chiếc xe?

Giá trị trung bình của một hàm số liên tục $f(x)$ trên một đoạn $[a, b]$, ký hiệu là f_{avg} , là một giá trị không đổi sao cho diện tích hình chữ nhật có chiều cao bằng f_{avg} và chiều rộng bằng $(b - a)$ sẽ bằng với diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$.

b. Công thức

Giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ được tính bằng công thức:

$$f_{\text{avg}} = (1 / (b - a)) * \int_a^b f(x) dx$$

Trong đó:

- $[a, b]$ là đoạn đang xét.
- $(b - a)$ là độ dài của đoạn.
- $\int_a^b f(x) dx$ là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ từ a đến b .

c. Ý nghĩa hình học

Như đã đề cập ở phần định nghĩa, công thức này có ý nghĩa hình học sâu sắc. Tích phân $\int_a^b f(x) dx$ biểu diễn diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$. Khi đó, công thức có thể viết lại là $f_{\text{avg}} * (b - a) = S$. Điều này có nghĩa là ta có thể "san bằng" diện tích dưới đường cong thành một hình chữ nhật có cùng diện tích và cùng cạnh đáy $[a, b]$. Chiều cao của hình chữ nhật đó chính là giá trị trung bình của hàm số.

Minh họa ý nghĩa hình học của giá trị trung bình hàm số

2. Các dạng bài tập ứng dụng

Dạng 1: Tính giá trị trung bình của hàm số cho trước

Đây là dạng bài tập cơ bản nhất, yêu cầu áp dụng trực tiếp công thức đã học.

Ví dụ 1:

Tính giá trị trung bình của hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x$ trên đoạn $[1, 4]$.

Lời giải:

1. Xác định các yếu tố: $a = 1$, $b = 4$, $f(x) = 3x^2 - 2x$.
2. Tính tích phân: $\int_1^4 (3x^2 - 2x) dx = [x^3 - x^2]_1^4 = (4^3 - 4^2) - (1^3 - 1^2) = (64 - 16) - (1 - 1) = 48$.
3. Áp dụng công thức giá trị trung bình: $f_{\text{avg}} = (1 / (4 - 1)) * 48 = (1/3) * 48 = 16$.

Vậy, giá trị trung bình của hàm số trên đoạn $[1, 4]$ là 16.

Ví dụ 2:

Tìm giá trị trung bình của hàm số $g(x) = \cos(x)$ trên đoạn $[0, \pi/2]$.

Lời giải:

1. Xác định các yếu tố: $a = 0$, $b = \pi/2$, $g(x) = \cos(x)$.
2. Tính tích phân: $\int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$.
3. Áp dụng công thức giá trị trung bình: $g_{\text{avg}} = (1 / (\pi/2 - 0)) * 1 = 1 / (\pi/2) = 2/\pi$.

Vậy, giá trị trung bình của hàm số trên đoạn $[0, \pi/2]$ là $2/\pi$.

Dạng 2: Tìm tham số khi biết giá trị trung bình

Bài toán cho trước giá trị trung bình và yêu cầu tìm tham số chưa biết trong hàm số hoặc trong cận tích phân.

Ví dụ:

Tìm giá trị của tham số m để giá trị trung bình của hàm số $f(x) = x^2 + m$ trên đoạn $[0, 3]$ bằng 5.

Lời giải:

1. Thiết lập phương trình theo công thức: $5 = \left(\frac{1}{3 - 0} \right) \cdot \int_0^3 (x^2 + m) dx$.
2. Tính tích phân vế phải: $\int_0^3 (x^2 + m) dx = \left[\frac{x^3}{3} + mx \right]_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + m \cdot 3 \right) - (0) = 9 + 3m$.
3. Thay kết quả tích phân vào phương trình: $5 = \left(\frac{1}{3} \right) \cdot (9 + 3m)$.
4. Giải phương trình tìm m : $15 = 9 + 3m \Leftrightarrow 6 = 3m \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy, với $m = 2$ thì giá trị trung bình của hàm số trên đoạn $[0, 3]$ bằng 5.

Dạng 3: Bài toán ứng dụng thực tế

Đây là dạng toán quan trọng, giúp học sinh thấy được sự hữu ích của tích phân trong đời sống và các ngành khoa học khác.

Ví dụ 1 (Vật lý):

Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi phương trình $v(t) = 10t - t^2$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ $t = 2s$ đến $t = 5s$.

Lời giải:

Vận tốc trung bình v_{avg} được tính bằng công thức giá trị trung bình của hàm $v(t)$ trên đoạn $[2, 5]$.

1. Công thức: $v_{\text{avg}} = (1 / (5 - 2)) * \int_2^5 (10t - t^2) dt$.

2. Tính tích phân: $\int_2^5 (10t - t^2) dt = [5t^2 - t^3/3]_2^5 = (5*5^2 - 5^3/3) - (5*2^2 - 2^3/3) = (125 - 125/3) - (20 - 8/3) = 250/3 - 52/3 = 198/3 = 66$.

3. Tính vận tốc trung bình: $v_{\text{avg}} = (1/3) * 66 = 22$ (m/s).

Vậy, vận tốc trung bình của vật từ giây thứ 2 đến giây thứ 5 là 22 m/s.

Ví dụ 2 (Kinh tế):

Chi phí cận biên (chi phí để sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm) của một mặt hàng được cho bởi hàm số $C'(x) = 30 - 0.02x$ (đơn vị: nghìn đồng/sản phẩm), với x là số sản phẩm được sản xuất. Tìm chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm khi sản xuất từ 100 đến 200 sản phẩm.

Lời giải:

Chi phí sản xuất trung bình chính là giá trị trung bình của hàm chi phí cận biên trên đoạn $[100, 200]$.

1. Công thức: $C'_{\text{avg}} = (1 / (200 - 100)) * \int_{100}^{200} (30 - 0.02x) dx$.

2. Tính tích phân: $\int_{100}^{200} (30 - 0.02x) dx = [30x - 0.01x^2]_{100}^{200} = (30*200 - 0.01*200^2) - (30*100 - 0.01*100^2) = (6000 - 400) - (3000 - 100) = 5600 - 2900 = 2700$.

3. Tính chi phí trung bình: $C'_{\text{avg}} = (1/100) * 2700 = 27$ (nghìn đồng/sản phẩm).

Vậy, chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm trong lô hàng này là 27 nghìn đồng.

3. Định lý Giá trị trung bình cho Tích phân

a. Phát biểu định lý

Nếu $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì tồn tại ít nhất một số c trong đoạn $[a, b]$ sao cho:

$$f(c) = f_{\text{avg}} = (1 / (b - a)) * \int_a^b f(x) dx$$

Định lý này còn có thể được viết dưới dạng: $\int_a^b f(x) dx = f(c) * (b - a)$.

b. Ý nghĩa

Định lý này đảm bảo rằng với một hàm số liên tục, luôn có một điểm c trên đoạn mà tại đó giá trị của hàm số $f(c)$ bằng đúng giá trị trung bình của hàm số trên cả đoạn đó. Về mặt hình học, điều này có nghĩa là luôn tồn tại một điểm trên đồ thị mà tung độ của nó chính là chiều cao của hình chữ nhật tương đương đã nói ở phần 1.

c. Ví dụ minh họa

Cho hàm số $f(x) = 4 - x^2$. Tìm giá trị $c \in [0, 2]$ thỏa mãn Định lý giá trị trung bình cho tích phân.

Lời giải:

1. Tính giá trị trung bình của $f(x)$ trên $[0, 2]$:

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx = [4x - x^3/3]_0^2 = (4*2 - 2^3/3) - 0 = 8 - 8/3 = 16/3.$$

$$f_{\text{avg}} = (1 / (2 - 0)) * (16/3) = 8/3.$$

2. Tìm c sao cho $f(c) = f_{\text{avg}}$:

- $4 - c^2 = 8/3$
- $c^2 = 4 - 8/3 = 4/3$
- $c = \pm\sqrt{4/3} = \pm 2/\sqrt{3}$.

3. Chọn giá trị c thuộc đoạn $[0, 2]$. Ta có $c = 2/\sqrt{3} \approx 1.155$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy, giá trị cần tìm là $c = 2/\sqrt{3}$.

4. Tổng kết và Lưu ý khi giải bài tập

- **Nắm vững công thức:** Công thức $f_{\text{avg}} = (1 / (b - a)) * \int_a^b f(x) dx$ là chìa khóa để giải quyết mọi bài toán.
- **Xác định đúng cận:** Luôn xác định chính xác cận dưới a và cận trên b của đoạn đang xét từ đề bài.
- **Tính tích phân cẩn thận:** Các lỗi sai trong việc tìm nguyên hàm hoặc thế cận là rất phổ biến. Hãy kiểm tra lại các bước tính toán của mình.
- **Phân biệt với trung bình cộng:** Giá trị trung bình của hàm số áp dụng cho các đại lượng liên tục, không phải là trung bình cộng của các giá trị rời rạc.
- **Đọc kỹ đề bài toán thực tế:** Hiểu rõ đại lượng nào cần tính giá trị trung bình (vận tốc, nhiệt độ, chi phí...) và biến số tương ứng (thời gian, vị trí, số lượng sản phẩm...).