

Giới thiệu về Phương trình Logarit

Phương trình logarit là phương trình chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu logarit hoặc ở cơ số của logarit. Việc giải các phương trình này đòi hỏi học sinh phải nắm vững các tính chất của logarit và vận dụng linh hoạt các phương pháp biến đổi. Trong tài liệu này, chúng ta sẽ tập trung vào hai phương pháp giải cơ bản và hiệu quả nhất: **Đưa về cùng cơ số** và **Đặt ẩn phụ**.

I. Phương pháp Đưa về cùng cơ số

Đây là phương pháp cơ bản nhất, dựa trên tính chất "một-một" của hàm số logarit. Nếu hai logarit có cùng cơ số bằng nhau thì hai biểu thức dưới dấu logarit cũng bằng nhau.

1. Các dạng phương trình cơ bản

- **Dạng 1:** $\log_a f(x) = b$

Công thức: $\log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$ (Với điều kiện $a > 0, a \neq 1$)

Giải thích: Đây là định nghĩa cơ bản của logarit. Điều kiện $f(x) > 0$ sẽ tự động được thỏa mãn vì a^b luôn dương.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_2(x - 5) = 3$.

Lời giải:

1. Điều kiện: $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$.

2. Áp dụng công thức: $\log_2(x - 5) = 3 \Rightarrow x - 5 = 2^3$.

3. Giải phương trình: $x - 5 = 8 \Rightarrow x = 13$.

4. Đối chiếu điều kiện: $x = 13$ thỏa mãn $x > 5$.

5. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{13\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_3(x^2 - 4x + 3) = 1$.

Lời giải:

1. Phương trình tương đương: $x^2 - 4x + 3 = 3^1$.

2. Giải phương trình: $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$.

3. Ta được hai nghiệm: $x = 0$ hoặc $x = 4$.

4. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0, 4\}$. (Không cần đặt điều kiện ban đầu vì vế phải là hằng số dương).

• **Dạng 2: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$**

Công thức: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow \{ f(x) = g(x) \text{ và } f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \}$

Giải thích: Khi giải $f(x) = g(x)$, ta chỉ cần đặt điều kiện cho một trong hai biểu thức $f(x)$ hoặc $g(x)$ dương là đủ. Ta nên chọn biểu thức đơn giản hơn để đặt điều kiện.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_5(3x - 1) = \log_5(x + 3)$.

Lời giải:

1. Điều kiện: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$. (Chọn biểu thức đơn giản hơn)
2. Phương trình tương đương: $3x - 1 = x + 3$.
3. Giải phương trình: $2x = 4 \Rightarrow x = 2$.
4. Đối chiếu điều kiện: $x = 2$ thỏa mãn $x > -3$.
5. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log(x^2 - 1) = \log(2x - 1)$.

Lời giải:

1. Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$.
2. Phương trình tương đương: $x^2 - 1 = 2x - 1$.
3. Giải phương trình: $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$.
4. Ta được hai nghiệm: $x = 0$ hoặc $x = 2$.
5. Đối chiếu điều kiện: $x = 0$ (loại), $x = 2$ (nhận).
6. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

2. Biến đổi để đưa về cùng cơ số

Trong nhiều trường hợp, phương trình không có sẵn dạng cơ bản. Ta cần sử dụng các tính chất của logarit để biến đổi.

Tính chất	Công thức
Tổng hai logarit	$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
Hiệu hai logarit	$\log_a b - \log_a c = \log_a (b/c)$
Logarit của lũy thừa	$\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$
Đổi cơ số	$\log_a^n b = (1/n) \log_a b$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$.

Lời giải:

- Điều kiện: $\{x - 1 > 0 \text{ và } x + 1 > 0\} \Rightarrow \{x > 1 \text{ và } x > -1\} \Rightarrow x > 1$.
- Áp dụng công thức tổng logarit: $\log_2[(x - 1)(x + 1)] = 3$.
- Biến đổi: $\log_2(x^2 - 1) = 3$.
- Giải phương trình: $x^2 - 1 = 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9$.
- Ta được hai nghiệm: $x = 3$ hoặc $x = -3$.
- Đối chiếu điều kiện: $x = 3$ (nhận), $x = -3$ (loại).
- Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.

Lời giải:

- Điều kiện: $x > 0$.
- Đưa về cùng cơ số 2: $\log_2 x + \log_2^2 x + \log_2^3 x = 11$.

3. Áp dụng công thức đổi cơ số: $\log_2 x + (1/2)\log_2 x + (1/3)\log_2 x = 11$.

4. Đặt nhân tử chung: $(1 + 1/2 + 1/3)\log_2 x = 11$.

5. Giải phương trình: $(11/6)\log_2 x = 11 \Rightarrow \log_2 x = 6$.

6. Tìm x: $x = 2^6 = 64$.

7. Đối chiếu điều kiện: $x = 64$ thỏa mãn $x > 0$.

8. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{64\}$.

II. Phương pháp Đặt ẩn phụ

Phương pháp này được sử dụng khi phương trình logarit có thể biến đổi thành một phương trình đại số (bậc hai, bậc ba,...) đối với một biểu thức logarit nào đó.

1. Dạng 1: Phương trình bậc hai, bậc ba với một ẩn logarit

Phương pháp chung:

1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

2. Biến đổi phương trình về dạng: $A[\log_a f(x)]^n + B[\log_a f(x)]^{n-1} + \dots + C = 0$.

3. Đặt $t = \log_a f(x)$. Phương trình trở thành phương trình đại số ẩn t.

4. Giải phương trình tìm t.

5. Với mỗi giá trị t tìm được, giải phương trình $\log_a f(x) = t$ để tìm x.

6. Đối chiếu điều kiện và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$.

Lời giải:

1. Điều kiện: $x > 0$.
2. Đặt $t = \log_3 x$. Phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$.
3. Giải phương trình ẩn t : $(t - 1)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$.
4. Với $t = 1$: $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3^1 = 3$.
5. Với $t = 3$: $\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$.
6. Đối chiếu điều kiện: Cả hai nghiệm $x = 3$ và $x = 27$ đều thỏa mãn $x > 0$.
7. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3, 27\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $1/(5 - \log_2 x) + 2/(1 + \log_2 x) = 1$.

Lời giải:

1. Điều kiện: $\{ x > 0, 5 - \log_2 x \neq 0, 1 + \log_2 x \neq 0 \} \Rightarrow \{ x > 0, \log_2 x \neq 5, \log_2 x \neq -1 \} \Rightarrow \{ x > 0, x \neq 32, x \neq 1/2 \}$.
2. Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình trở thành: $1/(5 - t) + 2/(1 + t) = 1$.
3. Quy đồng và giải phương trình ẩn t : $(1 + t) + 2(5 - t) = (5 - t)(1 + t) \Rightarrow 1 + t + 10 - 2t = 5 + 5t - t - t^2 \Rightarrow 11 - t = 5 + 4t - t^2$.
4. $t^2 - 5t + 6 = 0$.
5. Giải ra được $t = 2$ hoặc $t = 3$.
6. Với $t = 2$: $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$.
7. Với $t = 3$: $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$.
8. Đối chiếu điều kiện: Cả $x = 4$ và $x = 8$ đều thỏa mãn điều kiện.

9. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4, 8\}$.

2. Dạng 2: Phương trình chứa $\log_a b$ và $\log_b a$

Phương pháp: Sử dụng công thức đổi cơ số $\log_b a = 1 / \log_a b$ để đưa về phương trình chỉ chứa một loại logarit, sau đó đặt ẩn phụ.

Ví dụ: Giải phương trình $\log_2 x + 3\log_x 2 = 4$.

Lời giải:

1. Điều kiện: $\{x > 0, x \neq 1\}$.
2. Biến đổi phương trình: $\log_2 x + 3 * (1 / \log_2 x) = 4$.
3. Đặt $t = \log_2 x$ ($t \neq 0$). Phương trình trở thành: $t + 3/t = 4$.
4. Quy đồng và giải: $t^2 + 3 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$.
5. Giải ra được $t = 1$ hoặc $t = 3$.
6. Với $t = 1$: $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$.
7. Với $t = 3$: $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$.
8. Đối chiếu điều kiện: Cả $x = 2$ và $x = 8$ đều thỏa mãn.
9. Kết luận: Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2, 8\}$.

III. Lưu ý quan trọng khi giải phương trình Logarit

- **Luôn đặt điều kiện xác định:** Đây là bước quan trọng nhất để tránh nhận nghiệm ngoại lai. Biểu thức dưới dấu logarit phải dương, cơ số phải dương và khác 1.

- **Kiểm tra lại nghiệm:** Sau khi tìm được nghiệm, hãy thay lại vào phương trình ban đầu hoặc đối chiếu với điều kiện xác định.
- **Nắm vững các tính chất:** Việc biến đổi phương trình phụ thuộc hoàn toàn vào việc bạn có thuộc và hiểu các công thức, tính chất của logarit hay không.
- **Không nhầm lẫn:** Phân biệt rõ giữa $(\log_a x)^2$ và $\log_a (x^2)$. Hai biểu thức này hoàn toàn khác nhau. $(\log_a x)^2$ là bình phương của cả logarit, còn $\log_a (x^2) = 2\log_a |x|$.