

A. Lý thuyết chung về phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp đặt ẩn phụ là một kỹ thuật quan trọng trong việc giải các hệ phương trình phức tạp. Ý tưởng cơ bản là biến đổi hệ phương trình ban đầu, bằng cách đặt một hoặc nhiều biểu thức chứa ẩn thành các ẩn mới (ẩn phụ), để đưa hệ về một dạng đơn giản hơn, quen thuộc hơn (ví dụ: hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ đối xứng...).

Các bước giải tổng quát

- Bước 1: Phân tích và chọn ẩn phụ:** Quan sát hệ phương trình, tìm ra các biểu thức chung, lặp lại hoặc có mối liên hệ đặc biệt để đặt làm ẩn phụ. Đôi khi cần biến đổi hệ một chút trước khi đặt.
- Bước 2: Đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có):** Một số ẩn phụ có điều kiện về miền giá trị (ví dụ: ẩn phụ là căn thức, bình phương...). Việc đặt điều kiện giúp loại nghiệm ngoại lai.
- Bước 3: Chuyển hệ phương trình ban đầu về hệ theo ẩn phụ:** Thay thế các biểu thức đã chọn bằng ẩn phụ để có một hệ phương trình mới, đơn giản hơn.
- Bước 4: Giải hệ phương trình theo ẩn phụ:** Sử dụng các phương pháp đã biết để tìm giá trị của các ẩn phụ.
- Bước 5: Quay lại các ẩn ban đầu:** Từ giá trị của các ẩn phụ vừa tìm được, thay ngược lại vào biểu thức đặt ban đầu để tìm nghiệm (x, y) .

6. **Bước 6: Kiểm tra và kết luận:** Đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện xác định ban đầu của hệ (và điều kiện của ẩn phụ) để đưa ra kết luận cuối cùng.

B. Các dạng hệ phương trình thường gặp

1. Hệ phương trình đối xứng loại I

Định nghĩa: Là hệ phương trình mà khi ta thay đổi vai trò của x và y cho nhau thì từng phương trình trong hệ không thay đổi.

Phương pháp giải:

- Đặt $S = x + y$ và $P = x * y$.
- Điều kiện để có nghiệm x, y là $S^2 \geq 4P$.
- Biến đổi các phương trình trong hệ theo S và P . Một số biến đổi thường gặp:
 - $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$
 - $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = S^3 - 3SP$
 - $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
- Giải hệ phương trình mới với hai ẩn S và P .
- Với mỗi cặp (S, P) thỏa mãn $S^2 \geq 4P$, x và y sẽ là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $t^2 - St + P = 0$.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\{ x + y + xy = 5; x^2 + y^2 = 5 \}$

Giải:

Đặt $S = x + y$, $P = xy$. Điều kiện $S^2 \geq 4P$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\{ S + P = 5 \text{ (1)}; (x+y)^2 - 2xy = 5 \} \Leftrightarrow \{ S + P = 5; S^2 - 2P = 5 \text{ (2)} \}$$

Từ (1) suy ra $P = 5 - S$. Thay vào (2):

$$S^2 - 2(5 - S) = 5 \Leftrightarrow S^2 - 10 + 2S = 5 \Leftrightarrow S^2 + 2S - 15 = 0$$

Giải phương trình ta được $S = 3$ hoặc $S = -5$.

- Với $S = 3 \Rightarrow P = 5 - 3 = 2$. Kiểm tra điều kiện: $S^2 = 9, 4P = 8 \Rightarrow S^2 > 4P$ (thỏa mãn).

x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=2$.

Vậy ta có hai cặp nghiệm $(1; 2)$ và $(2; 1)$.

- Với $S = -5 \Rightarrow P = 5 - (-5) = 10$. Kiểm tra điều kiện: $S^2 = 25, 4P = 40 \Rightarrow S^2 < 4P$ (loại).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1; 2)$ và $(2; 1)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\{ x + y = 4; x^4 + y^4 = 82 \}$

Giải:

Đặt $S = x + y, P = xy$. Ta có $S = 4$.

Biến đổi phương trình thứ hai: $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$.

Thay $S = 4$ vào, ta có: $(16 - 2P)^2 - 2P^2 = 82$

$$\Leftrightarrow 256 - 64P + 4P^2 - 2P^2 = 82$$

$$\Leftrightarrow 2P^2 - 64P + 174 = 0 \Leftrightarrow P^2 - 32P + 87 = 0$$

Giải phương trình ta được $P = 3$ hoặc $P = 29$.

- Với $P = 3$: $S=4$. Điều kiện $S^2 = 16$, $4P = 12 \Rightarrow S^2 > 4P$ (thỏa mãn).

x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$.

Ta có hai cặp nghiệm $(1; 3)$ và $(3; 1)$.

- Với $P = 29$: $S=4$. Điều kiện $S^2 = 16$, $4P = 116 \Rightarrow S^2 < 4P$ (loại).

Vậy hệ có hai nghiệm là $(1; 3)$ và $(3; 1)$.

2. Hệ phương trình đối xứng loại II

Định nghĩa: Là hệ phương trình mà khi ta thay đổi vai trò của x và y cho nhau thì phương trình này trở thành phương trình kia của hệ.

Phương pháp giải:

- Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ.
- Phương trình mới thu được thường có dạng tích: $(x - y) \cdot G(x, y) = 0$.
- Từ đó, ta xét hai trường hợp:
 - **Trường hợp 1:** $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thay $x = y$ vào một trong hai phương trình ban đầu để giải tìm nghiệm.
 - **Trường hợp 2:** $G(x, y) = 0$. Kết hợp phương trình này với một phương trình của hệ ban đầu để tạo thành một hệ mới và giải tiếp.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\{ x^2 = 3y + 2; y^2 = 3x + 2 \}$

Giải:

Trừ vế theo vế hai phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 = (3y + 2) - (3x + 2) \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = -3(x - y)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ hoặc } x + y + 3 = 0$$

- **Trường hợp 1:** $x = y$. Thay vào phương trình đầu tiên:

$$x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Giải ra ta được $x = (3 + \sqrt{17})/2$ hoặc $x = (3 - \sqrt{17})/2$.

Vì $x = y$ nên ta có hai nghiệm: $((3 + \sqrt{17})/2; (3 + \sqrt{17})/2)$ và $((3 - \sqrt{17})/2; (3 - \sqrt{17})/2)$.

- **Trường hợp 2:** $x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 3$. Thay vào phương trình đầu tiên:

$$x^2 = 3(-x - 3) + 2 \Leftrightarrow x^2 = -3x - 9 + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 7 = 0.$$

Phương trình này có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 9 - 28 = -19 < 0$, nên vô nghiệm.

Vậy hệ có hai nghiệm như trên.

3. Hệ phương trình đẳng cấp

Định nghĩa: Là hệ phương trình có dạng $f(x, y) = a$, $g(x, y) = b$, trong đó $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là các biểu thức đẳng cấp (tổng số mũ của x và y trong mỗi số hạng là bằng nhau).

Phương pháp giải:

- **Bước 1:** Xét trường hợp $x = 0$, thay vào hệ để tìm y . Nếu có cặp $(0, y)$ thỏa mãn, đó là một nghiệm.

- **Bước 2:** Xét trường hợp $x \neq 0$. Đặt $y = tx$.
- **Bước 3:** Thay $y = tx$ vào cả hai phương trình của hệ. Mỗi phương trình sẽ có dạng $x^k \cdot F(t) = c$ (với k là bậc đẳng cấp).
- **Bước 4:** Khử x bằng cách chia vế theo vế hai phương trình, ta được một phương trình chỉ chứa ẩn t .
- **Bước 5:** Giải phương trình tìm t .
- **Bước 6:** Với mỗi giá trị t tìm được, thay $y = tx$ vào một trong các phương trình (đã biến đổi) để tìm x , từ đó suy ra y .

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\{ x^2 - 2xy + 3y^2 = 9; 2x^2 - xy + y^2 = 8 \}$

Giải:

Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ.

Đặt $y = tx$. Hệ phương trình trở thành:

$$\{ x^2 - 2x(tx) + 3(tx)^2 = 9; 2x^2 - x(tx) + (tx)^2 = 8 \}$$

$$\Leftrightarrow \{ x^2(1 - 2t + 3t^2) = 9 \quad (1); x^2(2 - t + t^2) = 8 \quad (2) \}$$

Lấy (1) chia (2) vế theo vế:

$$(1 - 2t + 3t^2) / (2 - t + t^2) = 9 / 8$$

$$\Leftrightarrow 8(1 - 2t + 3t^2) = 9(2 - t + t^2)$$

$$\Leftrightarrow 8 - 16t + 24t^2 = 18 - 9t + 9t^2$$

$$\Leftrightarrow 15t^2 - 7t - 10 = 0$$

Giải phương trình ta được $t = 1$ hoặc $t = -2/3$.

- **Với $t = 1$:** $\Rightarrow y = x$. Thay vào (2):

$$x^2(2 - 1 + 1^2) = 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Nếu $x = 2$ thì $y = 2$. Nếu $x = -2$ thì $y = -2$.

Ta có nghiệm $(2; 2)$ và $(-2; -2)$.

- **Với $t = -2/3$:** $\Rightarrow y = -2x/3$. Thay vào (2):

$$x^2(2 - (-2/3) + (-2/3)^2) = 8 \Leftrightarrow x^2(2 + 2/3 + 4/9) = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2(28/9) = 8 \Leftrightarrow x^2 = 18/7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{18/7} = \pm 3\sqrt{14}/7.$$

Nếu $x = 3\sqrt{14}/7$ thì $y = -2\sqrt{14}/7$. Nếu $x = -3\sqrt{14}/7$ thì $y = 2\sqrt{14}/7$.

Ta có nghiệm $(3\sqrt{14}/7; -2\sqrt{14}/7)$ và $(-3\sqrt{14}/7; 2\sqrt{14}/7)$.

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm.

4. Các dạng khác sử dụng ẩn phụ

Ngoài các dạng chuẩn trên, phương pháp đặt ẩn phụ còn rất linh hoạt, áp dụng cho nhiều hệ phương trình khác.

a. Đặt một ẩn phụ

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\{ \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4; x + y = 10 \}$

Giải:

Điều kiện: $x \geq -1, y \geq 1$.

Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{y-1}$. Điều kiện $u \geq 0, v \geq 0$.

Ta có $u^2 = x + 1 \Rightarrow x = u^2 - 1; v^2 = y - 1 \Rightarrow y = v^2 + 1$.

Phương trình $x + y = 10$ trở thành $(u^2 - 1) + (v^2 + 1) = 10 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = 10$.

Hệ ban đầu trở thành hệ đối xứng loại I:

$$\{ u + v = 4; u^2 + v^2 = 10 \}$$

Đặt $S = u+v = 4$, $P = uv$. Ta có $u^2 + v^2 = S^2 - 2P = 16 - 2P = 10 \Rightarrow 2P = 6 \Rightarrow P = 3$.

u, v là nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$.

- Nếu $u=1, v=3$ (thỏa mãn $u, v \geq 0$):

$$\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\sqrt{y-1} = 3 \Leftrightarrow y-1 = 9 \Leftrightarrow y = 10.$$

Nghiệm (0; 10).

- Nếu $u=3, v=1$ (thỏa mãn $u, v \geq 0$):

$$\sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 8.$$

$$\sqrt{y-1} = 1 \Leftrightarrow y-1 = 1 \Leftrightarrow y = 2.$$

Nghiệm (8; 2).

Cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện ban đầu. Vậy hệ có nghiệm (0; 10) và (8; 2).

b. Đặt nhiều ẩn phụ

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\{ 2/(x-1) + 1/(y+1) = 3; 1/(x-1) - 3/(y+1) = -2 \}$

Giải:

Điều kiện: $x \neq 1, y \neq -1$.

Đặt $u = 1/(x-1), v = 1/(y+1)$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\{ 2u + v = 3; u - 3v = -2 \}$$

Đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Giải hệ này, ta có thể nhân phương trình thứ hai với 2 rồi trừ, hoặc dùng phương pháp thế:

Từ phương trình thứ hai: $u = 3v - 2$. Thay vào phương trình đầu tiên:

$$2(3v - 2) + v = 3 \Leftrightarrow 6v - 4 + v = 3 \Leftrightarrow 7v = 7 \Leftrightarrow v = 1.$$

$$\text{Suy ra } u = 3(1) - 2 = 1.$$

Quay lại ẩn ban đầu:

- $u = 1 \Leftrightarrow 1/(x-1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$
- $v = 1 \Leftrightarrow 1/(y+1) = 1 \Leftrightarrow y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = 0.$

Nghiệm (2; 0) thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (2; 0).