

Tổng hợp kiến thức về Cung và Dây cung

Chuyên đề này cung cấp một cái nhìn tổng quan và chi tiết về các khái niệm, định lý liên quan đến cung và dây cung trong một đường tròn. Đây là những kiến thức nền tảng quan trọng trong chương trình Hình học lớp 9.

I. Các khái niệm cơ bản

1. Dây cung

Định nghĩa: Đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ nằm trên đường tròn được gọi là một dây cung (hay gọi tắt là dây) của đường tròn đó.

- Dây cung đi qua tâm của đường tròn được gọi là **đường kính**. Đường kính là dây cung lớn nhất trong một đường tròn.

Ví dụ: Trong đường tròn tâm O, lấy hai điểm A và B. Đoạn thẳng AB là một dây cung. Nếu O nằm trên đoạn thẳng AB thì AB là đường kính.

2. Cung tròn

Định nghĩa: Hai điểm A, B trên đường tròn chia đường tròn thành hai phần, mỗi phần được gọi là một cung tròn (hay gọi tắt là cung).

- Hai điểm A, B là hai mút của cung.
- Nếu A, B là hai đầu của một đường kính, ta có hai cung là hai nửa đường tròn.
- Nếu dây AB không phải là đường kính, cung nằm bên trong góc ở tâm AOB được gọi là **cung nhỏ**, cung nằm bên ngoài góc đó được gọi là **cung lớn**.

- Ký hiệu cung AB là $\widehat{AB}$. Để phân biệt cung lớn và cung nhỏ, ta có thể dùng thêm một điểm trên cung, ví dụ cung AmB là cung nhỏ, cung AnB là cung lớn.

3. Cung bị chắn

Góc ở tâm AOB chắn cung nhỏ AB. Người ta còn nói cung nhỏ AB là cung bị chắn bởi góc ở tâm AOB.

II. Các định lý quan trọng về Cung và Dây cung

Các định lý sau đây là công cụ cốt lõi để giải quyết các bài toán liên quan đến cung và dây cung.

1. Định lý 1: Liên hệ giữa cung và dây cung (Trường hợp bằng nhau)

Phát biểu: Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau:

1. Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.
2. Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

Công thức: Với hai dây AB, CD trong đường tròn (O):

$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và hai dây $AB = CD$. Chứng minh rằng hai tam giác OAB và OCD bằng nhau.

Giải:

Xét tam giác OAB và tam giác OCD có:

- $OA = OC$ (bán kính)

- $OB = OD$ (bán kính)

- $AB = CD$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OCD$ (c.c.c).

Từ đó suy ra góc ở tâm $\angle AOB = \angle COD$. Do đó, số đo cung AB bằng số đo cung CD , hay $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) có hai cung bằng nhau $\widehat{MN} = \widehat{PQ}$. Biết $MN = 6\text{cm}$.

Tính độ dài dây PQ .

Giải:

Vì $\widehat{MN} = \widehat{PQ}$ (giả thiết), theo định lý liên hệ giữa cung và dây, ta có dây căng hai cung này bằng nhau.

Vậy $MN = PQ$.

Mà $MN = 6\text{cm}$, suy ra $PQ = 6\text{cm}$.

2. Định lý 2: So sánh cung và dây cung (Trường hợp không bằng nhau)

Phát biểu: Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau:

1. Dây lớn hơn thì căng cung lớn hơn.
2. Cung lớn hơn thì căng dây lớn hơn.

Lưu ý: Định lý này chỉ đúng khi so sánh hai cung nhỏ hoặc một cung nhỏ và một nửa đường tròn.

Công thức: Với hai dây AB, CD và hai cung nhỏ tương ứng trong đường tròn (O) :

$$AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$$

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và hai dây MN, PQ sao cho $MN > PQ$. So sánh số đo của hai cung $\widehat{MN}$ và $\widehat{PQ}$.

Giải:

Vì MN và PQ là hai dây của cùng một đường tròn (O) và $MN > PQ$, theo định lý, dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Do đó, $\widehat{MN} > \widehat{PQ}$.

Ví dụ 2: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\angle B > \angle C$. So sánh độ dài hai cung $\widehat{AC}$ và $\widehat{AB}$.

Giải:

Trong tam giác ABC, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Vì $\angle B > \angle C$ nên cạnh đối diện $AC > AB$.

Trong đường tròn (O), vì dây $AC > AB$ nên cung căng dây AC sẽ lớn hơn cung căng dây AB.

Vậy $\widehat{AC} > \widehat{AB}$.

3. Định lý 3: Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Phát biểu:

1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

Công thức: Cho đường tròn (O), đường kính CD và dây AB (AB không phải đường kính) cắt nhau tại I:

$CD \perp AB$ tại I $\Leftrightarrow IA = IB$

Hệ quả: Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây đó.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O; R=5cm) và dây AB = 8cm. Kẻ đường kính CD vuông góc với AB tại I. Tính độ dài IA và IB.

Giải:

Vì đường kính CD vuông góc với dây AB tại I, theo định lý, CD đi qua trung điểm của AB.

Do đó, I là trung điểm của AB.

Vậy $IA = IB = AB / 2 = 8 / 2 = 4\text{cm}$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O; R=10cm). Dây MN cách tâm một khoảng 6cm. Tính độ dài dây MN.

Giải:

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến MN. Khi đó OH = 6cm là khoảng cách từ tâm đến dây.

Theo định lý, đường kính qua H vuông góc với MN, nên H là trung điểm của MN.

Xét tam giác vuông OMH, ta có:

$$OM^2 = OH^2 + MH^2 \text{ (Định lý Pytago)}$$

$$10^2 = 6^2 + MH^2$$

$$100 = 36 + MH^2$$

$$MH^2 = 64 \Rightarrow MH = 8\text{cm}.$$

Vì H là trung điểm của MN nên $MN = 2 * MH = 2 * 8 = 16\text{cm}.$

4. Định lý 4: Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm (Trường hợp bằng nhau)

Phát biểu: Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau:

1. Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
2. Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Công thức: Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD. Gọi $d(O, AB)$ và $d(O, CD)$ là khoảng cách từ tâm O đến hai dây:

$$AB = CD \Leftrightarrow d(O, AB) = d(O, CD)$$

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng khoảng cách từ tâm O đến AB bằng khoảng cách từ tâm O đến AC.

Giải:

Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB và AC ($H \in AB, K \in AC$).

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$.

Trong đường tròn (O), hai dây AB và AC bằng nhau. Theo định lý, hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

Vậy $d(O, AB) = d(O, AC)$, hay $OH = OK$.

5. Định lý 5: So sánh độ dài dây và khoảng cách từ tâm (Trường hợp không bằng nhau)

Phát biểu: Trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau:

1. Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
2. Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Công thức: Cho đường tròn (O) có hai dây AB, CD. Gọi $d(O, AB)$ và $d(O, CD)$ là khoảng cách từ tâm O đến hai dây:

$$AB > CD \Leftrightarrow d(O, AB) < d(O, CD)$$

Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và hai dây $AB = 16\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$. Gọi OH và OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB và CD. So sánh OH và OK.

Giải:

Ta có $AB = 16\text{cm}$, $CD = 12\text{cm} \Rightarrow AB > CD$.

Trong một đường tròn, dây lớn hơn thì gần tâm hơn.

Do đó, khoảng cách từ O đến AB nhỏ hơn khoảng cách từ O đến CD.

Vậy $OH < OK$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O), hai dây MN và PQ. Biết khoảng cách từ O đến MN là 3cm, khoảng cách từ O đến PQ là 5cm. So sánh độ dài hai dây MN và PQ.

Giải:

Ta có $d(O, MN) = 3\text{cm}$ và $d(O, PQ) = 5\text{cm}$.

Vì $d(O, MN) < d(O, PQ)$ ($3\text{cm} < 5\text{cm}$).

Trong một đường tròn, dây gần tâm hơn thì lớn hơn.

Vậy $MN > PQ$.

III. Bảng tổng hợp các mối quan hệ

Đối tượng so sánh	Mối quan hệ
Cung và Dây	$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$ $AB > CD \Leftrightarrow \widehat{AB} > \widehat{CD}$ (với cung nhỏ)
Đường kính và Dây	Đường kính $\perp$ Dây $\Leftrightarrow$ Đường kính đi qua trung điểm của dây đó.
Dây và Khoảng cách đến tâm	$AB = CD \Leftrightarrow d(O, AB) = d(O, CD)$ $AB > CD \Leftrightarrow d(O, AB) < d(O, CD)$